PROBLEMAS RESUELTOS
Estadistica 1

ESPACIO MUESTRAL
Conteo de Puntos Muestrales:

1. Un restaurante ofrece cebolla, salsa, mostaza y picante como condimento para su agregado a una hamburguesa simple

a) Cuántas clases de hamburguesas puede preparar si los sabores se clasifican en: sin sabor, con uno, con dos, tres o cuatro condimentos a la vez?

b) Si se prepara una de cada sabor, cuál es la probabilidad de que una persona que tome una al azar, tome una que tiene salsa?

SOLUCION:

a) Las clases de hamburguesas que el restaurante puede preparar están en función del número de condimentos que las mismas lleven. Por lo tanto habría que contar las distintas clases de hamburguesas de acuerdo al número de condimentos que ellas lleven:

# de condimentos a utilizar	Condimentos disponibles	Clases de hamburguesas
Ninguno (sin sabor)	Cebolla, salsa, mostaza, picante	${}_4C_0$ = 1clase
1 condimento	Cebolla, salsa, mostaza, picante	${}_4C_1$ = 4 clases
2 condimentos	Cebolla, salsa, mostaza, picante	${}_4C_2$ = 6 clases
3 condimentos	Cebolla, salsa, mostaza, picante	${}_4C_3$ = 4 clases
4 condimentos	Cebolla, salsa, mostaza, picante	${}_4C_4$ = 1 clase

16 clases

Nótese que se han usado combinaciones para encontrar las distintas clases de hamburguesas. Esto se debe a que no nos interesa el orden que lleven los condimentos en las hamburguesas.

R/ Se pueden preparar 16 clases de hamburguesas, las cuales representan nuestro espacio muestral de 16 elementos.

b) Sea A el evento que consiste en seleccionar una hamburguesa que tenga salsa. Habría que encontrar el # de hamburguesas distintas que tengan salsa:

Condimentos	Clases de hamburguesas con salsa
Sólo salsa	1 clase
Salsa y otro más	$1 * {}_3C_1 =$ 3 clases
Salsa y dos más	$1 * {}_3C_2 =$ 3 clases
Salsa y tres más	$1 * {}_3C_3 =$ 1 clase
	8 clases

R/ Los elementos de A son 8, por lo tanto P(A) = 8/16 = 1/2.

Probabilidad de un Evento:

2. Una maquina tiene un indicador con dos cilindros numéricos, cada uno marcado de 0 a 9. Por medio de un resorte se hace girar los cilindros al azar. Calcular las probabilidades de que:

A) La suma de los números de los dos cilindros sea igual a 9.
B) Aparezcan dos números cuya suma sea igual a 10.
C) La suma de los dos números sea por lo menos 5.

SOLUCION:

A) Los números a utilizar son 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, por lo que para el primer inciso debemos ver de cuantas formas podemos lograr que la suma de ellos nos den 9.

S_1= { (0,9) (1,8) (2,7) (3,6) (4,5) (5,4) (6,3) (7,2) (8,1) (9,0) }

Luego conociendo las formas de obtener la sumatoria de 9 con los dos números calculamos la probabilidad de cada uno de ellos:

$P(S_1)$= P(0,9)+ P(1,8)+ P(2,7)+ P(3,6)+ P(4,5)+ P(5,4)+ P(6,3)+ P(7,2)+ P(8,1)+ P(9,0)

Por lo que son diez formas diferentes.

La probabilidad de cada número es 1/10, si se consideran los cilindros independientes entonces la probabilidad de:

$P(S_1)$= *(1/10)*(1/10)*10* $\underline{= 0.1}$

Donde 1/10 representa la probabilidad de cada número que en este caso lo multiplicamos dos veces ya que son dos números a sumar, multiplicado por 10 también que son las diez formas de que dan la sumatoria de 9.

B) Su procedimiento es igual al anterior solo que en este caso, son 9 formas las que dan como resultado de la suma 10.

S_2 = {(1,9) (2,8) (3,7) (4,6) (5,5) (6,4) (7,3) (8,2) (9,1)}
$P(S_2)$ = P(1,9)+ P(2,8)+ P(3,7)+ P(4,6)+ P(5,5)+ P(6,4)+ P(7,3)+ P(8,2)+ P(9,1)
$P(S_2)$ = *(1/10)*(1/10)*9* $\underline{= 0.09}$

C) Debe de hacerse una relación con los 2 números que aparezcan en los cilindros donde por lo menos la sumatoria de los dos números nos dé por lo menos 5 y en este caso lo máximo sería (9+9) =18.

Para poder sacar cada una de las probabilidades que en este caso sería del 5 al 18 que es el resultado obtenido por la suma de los dos números lo hacemos uno por uno siguiendo el procedimiento de los anteriores.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
2	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
3	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
4	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
5	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
6	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9
7	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9
8	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9
9	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9

P(5) = P(0,5)+ P(1,4)+ P(2,3)+ P(3,2)+ P(4,1)+ P(5,0)
P(5) = (1/10)*(1/10)*6 = 0.06

P(6) = P(0,6)+ P(1,5)+ P(2,4)+ P(3,3)+ P(4,2)+ P(5,1)+ P(6,0)
P(6) = (1/10)*(1/10)*7 = 0.07

P(7) = (1/10)*(1/10)*8 = 0.08

P(8) = (1/10)*(1/10)*9 = 0.09

P(9) = (1/10)*(1/10)*10 = 0.1

P(10) = (1/10)*(1/10)*9 = 0.09

P(11) = (1/10)*(1/10)*8 = 0.08

P(12) = (1/10)*(1/10)*7 = 0.07

P(13) = (1/10)*(1/10)*6 = 0.06

P(14) = (1/10)*(1/10)*5 = 0.05

P(15) = (1/10)*(1/10)*4 = 0.04

P(16) = (1/10)*(1/10)*3 = 0.03

P(17) = (1/10)*(1/10)*2 = 0.02

P(18) = (1/10)*(1/10)*1 = 0.01

En donde nuestra probabilidad total es la sumatoria de la probabilidad del 5 al 18.

$P(S_3)=$ 6+0.07+0.08+0.09+0.1+0.09+0.08+0.07+0.06+0.05+0.04+0.03+0.02+0.01 = <u>0.85</u>

También se puede resolver de la siguiente manera;

$P(S_3)$ = 1 - P(la suma es menor o igual a 4)

$P(S_3)$ = 1 - [P(suma=0) + P(suma=1) + P(suma=2) + P(suma=3) + P(suma=4)]

$P(S_3)$ = 1 - 0.15 = <u>0.85</u>

3. Catorce monedas de 25 centavos y una que es de oro con valor de Q5.00 están en una bolsa; 15 monedas de 25 centavos están en otra. Se toman monedas de la primera bolsa y se colocan en la segunda. A continuación se toman 5 monedas de la segunda bolsa y se colocan en la primera. ¿ Cuál es la probabilidad, después de estas transacciones, que la moneda de oro se encuentre aun en la primera bolsa?

SOLUCION:

Tenemos al inicio 2 bolsas con las siguientes monedas

Bolsa 1	Bolsa 2
14----------Q 0.25	15-------------Q 0.25
1----------Q 5.00	

Por lo que vamos a considerar 2 formas de experimentos que consisten en;

<u>Experimento 1</u>; Donde seleccionamos 5 monedas de la primera bolsa y la colocamos en la segunda. Aquí puede darse 2 formas A y B.

A) Que seria que al pasar las 5 monedas de la bolsa 1 para la bolsa 2 solo pasen las 5 monedas de 25 ctvs y que la de oro se quede en la bolsa1.

Bolsa 2 ------------- 15 monedas + 5 monedas = 20 monedas de 25 ctvs.

B) Que seria que al pasar las 5 monedas de la bolsa 1 a la bolsa 2 entre ellas se pase la moneda de oro, quedando así la bolsa 2 de la siguiente forma.

Bolsa 2---------------15 monedas +(4 monedas + 1 moneda de oro)= 19 monedas de 25ctv. 1 moneda de oro.

<u>Experimento 2:</u> Donde tomamos 5 monedas de la bolsa 2 y las colocamos en la bolsa 1. Quedando aquí también 2 alternativas C y D, dado que la moneda de oro pasa a la bolsa 2.

C) Que seria que al pasar las 5 monedas de la bolsa 2 a la bolsa 1 , las 5 monedas sean de 25 ctvs y que la de oro no pase. Quedando así la bolsa 1 de esta manera;

Bolsa 1 ------------ 10 monedas que quedaron + 5 monedas = 15 monedas de 25 ctvs

D) Que al pasar las 5 monedas de la bolsa 2 a la bolsa 1, entre ellas valla la moneda de oro quedando así:

Bolsa 1----------------10 monedas que quedaron + (4 monedas + 1 moneda de oro)=
= 14 monedas de 25 ctvs.
1 moneda de oro.

Como se puede observar las 4 alternativas son:

a) Se queda la moneda de oro y se trasladan 5 monedas de 25 ctvs.
b) Se va la moneda de oro y 4 de 25 ctvs.
C) Regresan las 5 monedas de 25 ctvs, dado que paso la de oro a la bolsa 2.
D) Regresa la moneda de oro, dado que paso a la bolsa 2.

Quedando nuestro resultado de la siguiente forma;

P(la moneda de oro en la bolsa 1) = P(que la moneda de oro permanezca en la bolsa 1) + P(que la moneda de oro pase a la bolsa 2 y regrese a la bolsa 1)=

$$\frac{{}_{14}C_5}{{}_{15}C_5} * \frac{{}_{20}C_5}{{}_{20}C_5} + \frac{{}_{1}C_1 * {}_{14}C_4}{{}_{15}C_5} * \frac{{}_{1}C_1 * {}_{19}C_4}{{}_{20}C_5}$$

R/ La probabilidad es de <u>0.7433</u>

4. **Una firma de construcción A debe tener cuando menos 2 obras a su cargo dentro de una semana para mantener el empleo de su personal básico. Ha sometido proyectos para cada una de tres obras del tipo I y para cada una de dos obras del tipo II. Las firmas ganadoras serán anunciadas dentro de la semana crucial. Supóngase que la firma A tiene probabilidad de 1/2 de que le otorguen una obra del tipo I y la probabilidad de 3/4 de que le otorguen una obra del tipo II. Las decisiones serán hechas independientemente. Cuál es la probabilidad de que la firma A esté en condiciones de continuar con el empleo de su personal básico?**

SOLUCION:

La firma debe tener por lo menos 2 obras a su cargo de las 5 posibles (3 tipo I y 2 tipo II).

Sea X el evento que sea aprobado un proyecto tipo I & Y el evento que sea aprobado un proyecto tipo II:

$P(X) = 0.5 \quad P(X^c) = 1 - P(X) = 0.5$

$P(Y) = 0.75 \quad P(Y^c) = 1 - P(Y) = 0.25$

Hay que encontrar entonces la probabilidad de que sean aprobados por lo menos 2 proyectos (2, 3, 4 ó 5 proyectos).

Probabilidad (Por lo menos 2 proyectos aprobados) =
1 - (Probabilidad(Ninguno aprobado) + Probabilidad(Uno aprobado))

Puesto que las decisiones de aprobación de los proyectos son independientes:

Probabilidad (Ninguno aprobado)= $P(X^c) * P(X^c) * P(X^c) * P(Y^c) * P(Y^c)$

$= 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.25 * 0.25 = 0.0078125$

Probabilidad (Uno aprobado) =

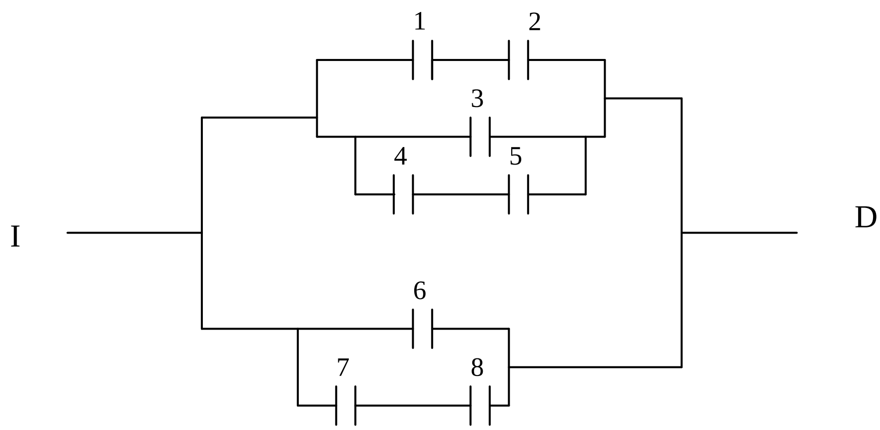
$$\begin{aligned} & P(X) * P(X^c) * P(X^c) * P(Y^c) * P(Y^c) \\ + & P(X^c) * P(X) * P(X^c) * P(Y^c) * P(Y^c) \\ + & P(X^c) * P(X^c) * P(X) * P(Y^c) * P(Y^c) \\ + & P(X^c) * P(X^c) * P(X^c) * P(Y) * P(Y^c) \\ + & P(X^c) * P(X^c) * P(X^c) * P(Y^c) * P(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \ 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.25 * 0.25 \\ + & \ 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.25 * 0.25 \\ + & \ 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.25 * 0.25 \\ + & \ 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.75 * 0.25 \\ + & \ 0.5 * 0.5 * 0.5 * 0.25 * 0.75 \\ \hline = & \ 0.0703125 \end{aligned}$$

Probabilidad (Ninguno aprobado) + Probabilidad (uno aprobado) = 0.078125
Probabilidad (por lo menos 2 proyectos aprobados) = 1- 0.078125 = 0.9218

R/ La probabilidad de que la firma pueda mantener su personal básico es 0.9218.

5. La probabilidad de cerrar cada uno de los relés del circuito siguiente está dada por P. Si todos los relés funcionan independientemente, Cuál es la probabilidad de que exista una corriente entre las terminales I, D? Si la probabilidad de que el relé esté abierto al llegar la corriente es igual a 0.2.



SOLUCION:

La corriente pasará por un relé cuando esté cerrado, y la probabilidad de que eso suceda es P= 1 -0.2 = 0.8. También podemos observar que la corriente NO pasará por el relé con probabilidad de 0.2.

Considerando los siguientes eventos:

A= La corriente pasa por 1 & 2.
B= La corriente pasa por 3
C= La corriente pasa por 4 & 5.
D= La corriente pasa por 6
E= La corriente pasa por 7 & 8.

Hay que encontrar la probabilidad de que la corriente pase de I hasta D. Esto es posible si la corriente pasa en POR LO MENOS UNA ruta anteriormente mencionadas. Es decir que la corriente puede pasar por una, dos, tres, cuatro o cinco rutas SIMULTANEAMENTE.

Lo más fácil en éste caso es encontrar la probabilidad por medio del complemento. Es decir :

La probabilidad de que pase la corriente en por lo menos una ruta es igual a 1 menos la probabilidad de que la corriente NO pase en alguna de las Rutas (que no pase la corriente); en otras palabras:

P(pase)= 1 - P(no pase)

Puesto que hay que encontrar la probabilidad de que la corriente NO pase, debemos estudiar cada una de las rutas.

<u>Probabilidad de que la corriente no pase por A</u>
La corriente no pasará por A sí y solo si por lo menos un relé está abierto y puesto que los relés son independientes:
$P(A^c)$ = P(abierto 1) + P (abierto 2) - P(Abierto 1 & Abierto 2)
$P(A^c) = 0.2 + 0.2 - (0.2)^2 = 0.36$

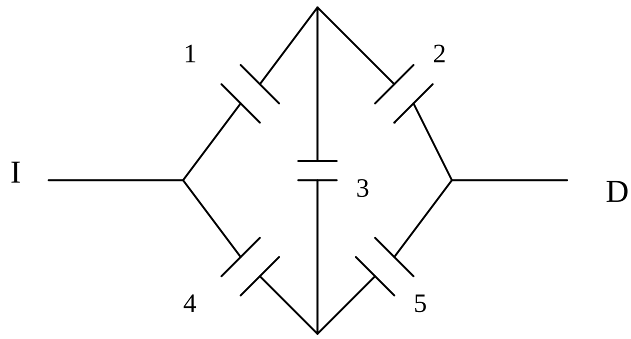
Que sería la misma probabilidad para las rutas C y E.

PUESTO QUE LAS RUTAS SON INDEPENDIENTES, ya que no tienen relés comunes; la probabilidad de que la corriente no pase en ALGUNA de las rutas sería:
P(no pase) = P(no pase A)* P(no pase B)*P(no pase C)*P(no pase D) *P(no pase E)
= 0.36*0.2*0.36*0.2*0.36 = 0.00186624

Por lo tanto, la probabilidad de que la corriente pase en por lo menos una ruta es:
P(pase)= 1 - 0.00186624 = 0.9981
R/ La probabilidad de que la corriente pase de I hasta D es 0.9981.

REGLAS ADITIVAS:

6. En la figura se supone que la probabilidad de que cada relé esté cerrado es "p" y que cada relé se abre o se cierra independientemente de cualquier otro. Encontrar la probabilidad de que la corriente pase de I hasta D.



SOLUCION:

La probabilidad de que pase corriente en cada relé es la probabilidad de que esté cerrado ("p"). Y la probabilidad de que no pase la corriente es "q" = 1 - p.

Notas a considerar:

- Cada relé es independiente de los otros.
- Para que pase corriente de I hasta D esta puede pasar por lo menos en alguna de las siguientes rutas:

  Ruta A(Relé 1 y 2); Ruta B(Relé 1 y 3 y 5); Ruta C (Relé 4 y 3 y 2);
  Ruta D (Relé 4 y 5.)

Esto es:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$

Para que la corriente pase por alguna ruta, TODOS los relés involucrados en esa ruta deben estar cerrados.

$P(A) = p * p = p^2$
$P(B) = p * p * p = p^3$
$P(C) = p * p * p = p^3$
$P(D) = p * p = p^2$

Para que la corriente pase en las rutas A y B es necesario que 4 relés (1,2,3,5) estén cerrados. Es decir:
$P(A \cap B) = p * p * p * p = p^4$.

Este mismo concepto aplicamos para las otras intersecciones:

$P(A \cap C) = p^4$
$P(A \cap D) = p^4$
$P(C \cap D) = p^4$
$P(A \cap B \cap D) = p^5$
$P(B \cap C \cap D) = p^5$
$P(B \cap C) = p^5$
$P(B \cap D) = p^4$
$P(A \cap B \cap C) = p^5$
$P(A \cap C \cap D) = p^5$
$P(A \cap B \cap C \cap D) = p^5$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = p^2 + p^3 + p^3 + p^2 - p^4 - p^4 - p^4 - p^5 - p^4 - p^4 + p^5 + p^5 + p^5 + p^5 - p^5 = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

R/ La probabilidad de que la corriente pase de I hasta D es $2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.

7. Suponga que una persona viaja a Europa, la probabilidad que ira a Londres es 0.7, a París es 0.64 a Roma 0.58 a Amsterdam 0.58, que visitara Londres y París 0.45, Roma y Londres 0.42, Londres y Amsterdam 0.41, París y Roma 0.35, París y Amsterdam 0.39, Roma y Amsterdam 0.32, que visitara Londres, París y Roma 0.23. Londres, París y Amsterdam 0.26, Londres, Roma y Amsterdam 0.21. Que conocerá París, Roma y Amsterdam 0.20 y que conocerá las 4 ciudades 0.12. ¿Cual es la probabilidad que una persona que viaja a Europa conozca

a) Cuando menos una de las 4 ciudades?
b) Exactamente una de las cuatro ciudades?

SOLUCION:

Para la solución del problema se usara la siguiente simbología:
L = Londres
P = París
R = Roma
A = Amsterdam

Datos:

- L = 0.7	- $R \cap L$ = 0.42	- $L \cap P \cap R$ = 0.23
- P = 0.64	- $L \cap A$ = 0.41	- $L \cap P \cap A$ = 0.26
- R = 0.58	- $P \cap R$ = 0.35	- $L \cap R \cap A$ = 0.21
- A = 0.58	- $P \cap A$ = 0.39	- $P \cap R \cap A$ = 0.20
- $L \cap P$ = 0.45	- $R \cap A$ = 0.32	- $L \cap P \cap R \cap A$ = 0.12

Para la solución de problemas de este tipo, se utiliza para visualizar de mejor manera el diagrama de Benn, con los datos de las intersecciones, restaría calcular las probabilidades de cada evento por sí solo; para ello tenemos:
Dos eventos:
A y B
P(A solo) = P(A) - P($A \cap B$)

Tres eventos:
A, B y C
P(A solo) = P(A) - P($A \cap B$) - P($A \cap C$) - P($A \cap B \cap C$)

Cuatro eventos:
A, B, C y D
P(A solo) = P(A) - P($A \cap B$) - P($A \cap C$) - P($A \cap D$) + P($A \cap B \cap C$) + P($A \cap B \cap D$) + P($A \cap C \cap D$) - P($A \cap B \cap C \cap D$)

Por lo tanto

Para solo L:

$$P(L) = 0.70 - 0.45 - 0.42 - 0.41 + 0.23 + 0.26 + 0.21 - 0.12$$

Calculando:

$$P(L) = 0$$

Para solo P:

$$P(P) = 0.64 - 0.45 - 0.35 - 0.39 + 0.23 + 0.26 + 0.20 - 0.12$$

Calculando:

$$P(P) = 0.02$$

Para solo R:

$$P(R) = 0.58 - 0.42 - 0.35 - 0.32 + 0.23 + 0.21 + 0.20 - 0.12$$

Calculando:

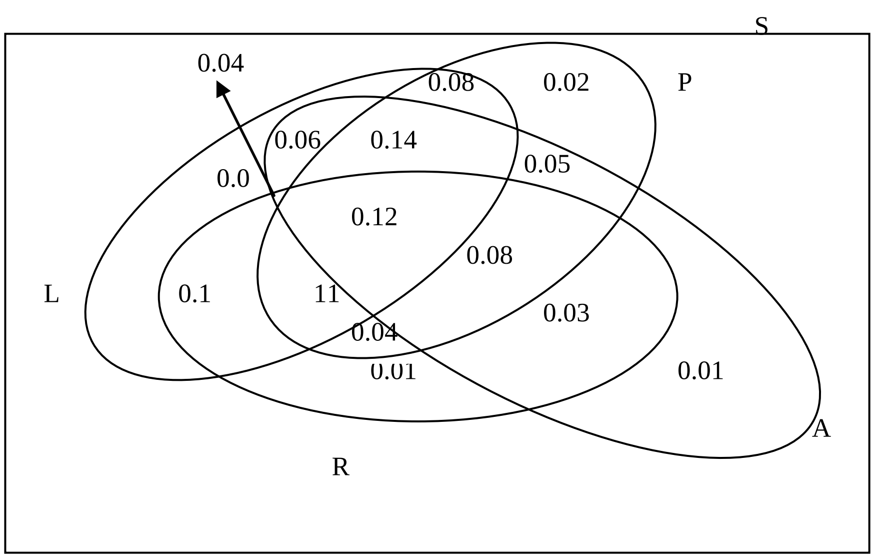
$$P(R) = 0.01$$

Para solo A:

$$P(A) = 0.58 - 0.41 - 0.39 - 0.32 + 0.26 + 0.21 + 0.20 - 0.12$$

Calculando:

$$P(A) = 0.01$$



a) P(cuando menos una de las cuatro ciudades) = ?
$\Rightarrow$ P(cuando menos una) = $P(L \cup R \cup A \cup P)$

Si sabemos que
$P(L \cup R \cup A \cup P) = P(L) + P(R) + P(A) + P(P) - P(L \cap R) - P(L \cap A) - P(L \cap P) - P(R \cap A) - P(R \cap P) - P(A \cap P) + P(L \cap R \cap A) + P(L \cap R \cap P) + P(L \cap A \cap P) + P(R \cap A \cap P) - P(L \cap R \cap A \cap P)$

Ingresándole valores:
$P(L \cup R \cup A \cup P) = 0.7 + 0.64 + 0.58 + 0.58 - 0.45 - 0.42 - 0.41 - 0.35 - 0.39 - 0.32 + 0.23 + 0.26 + 0.21 + 0.20 - 0.12$
$P(L \cup R \cup A \cup P) = 0.94$

b) P(exactamente una de las cuatro ciudades) = ?

Del diagrama de Benn observamos:
$\Rightarrow$ P(ex. Una) = P(solo L) + P(solo R) + P(solo A) + P(solo P)

y concluimos:
P(ex. Una ciudad) = 0.0 + 0.01 + 0.01 + 0.02 = 0.04

8. Una travesía puede hacerse con aviones bimotores o con cuatrimotores. Los bimotores pueden volar al menos con un solo motor y los cuatrimotores con dos. La probabilidad de que un motor falle durante la travesía es P. ¿Cuáles aviones son los mas seguros?

SOLUCION:

Para la solución sabemos que P = probabilidad de que un motor que falle y 1 - P = la probabilidad de que no falle.

Por lo tanto:

P = Averiado (malo)
1 - P = funcionando (bueno)

El avión más seguro es el que tiene mayor probabilidad de volar.

Como los motores son independientes sabemos que:
$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$ o sea que se den ambos

Avión Bimotor
Posibles combinaciones dado que al menos tiene que funcionar un motor

- M_1bueno y M_2malo $\Rightarrow$ que funcione 1 motor
- M_1malo y M_2bueno $\Rightarrow$ "
- M_1bueno y M_2bueno $\Rightarrow$ que funcionen los dos motores

Entonces:
$P(v) = P(M_1b \cap M_2m) + P(M_1m \cap M_2b) + P(M_1b \cap M_2b)$
$P(v) = (1 - P)P + P(1 - P) + (1 - P)(1 - P)$

Operando
$P(v) = P - P^2 + P - P^2 + 1 - 2P + P^2$
$P(v) = 1 - P^2 \Rightarrow$ Probabilidad de volar aviones bimotores.

Lo cuál se puede calcular, además con la distribución binomial, donde se limita que pueden volar con al menos un motor.

Por lo tanto

$$P(x \geq 1) = P(x=2) + P(x=1)$$

$$P(x \geq 1) = {}_2C_2\,(P)^0\,(1 - P)^2 + 2C1(P)^1(1 - P)^1$$

$\Rightarrow P(x \geq 1) = (1 - P)^2 + 2P(1 - P) \Rightarrow P(x \geq 1) = 1 - 2P + P^2 + 2P - 2P^2$

$\Rightarrow P(x \geq 1) = 1 - P^2$

Avión Cuatrimotor

Se sigue la misma mecánica que para el avión bimotor, a diferencia que en este serán 4 motores.

$P(v) = P(B_1B_2M_3M_4) + P(B_1M_2B_3M_4) + P(B_1M_2M_3B_4) + P(M_1B_2B_3M_4) + P(M_1B_2M_3B_4) + P(M_1M_2B_3B_4) + P(B_1B_2B_3M_4) + P(B_1B_2M_3B_4) + P(B_1M_2B_3B_4) + P(M_1B_2B_3B_4) + P(B_1B_2B_3B_4)$

$P(v) = (1 - P)(1 - P)PP + (1 - P)P(1 - P)P + (1 - P)PP(1 - P) + P(1 - P)(1 - P)P + (1 - P)P(1 - P)P + PP(1 - P)(1 - P) + (1 - P)(1 - P)(1 - P)P + (1 - P)(1 - P)P(1 - P) + (1 - P)P(1 - P)(1 - P) + P(1 - P)(1 - P)(1 - P) + (1 - P)(1 - P)(1 - P)(1 - P)$

Operando:

$P(v) = 6(1 - P)^2P^2 + 4(1 - P)^3P + (1 - P)^4$

$\Rightarrow P(v) = (1 - P)^2(6P^2 + 4(1 - P)P + (1 - P)^2)$

$\Rightarrow P(v) = (1 -2P + P^2)(6P^2 + 4P - 4P^2 + 1 - 2P + P^2)$

$\Rightarrow P(v) = (1 -2P + P^2)(3P^2 + 2P + 1)$

$\Rightarrow$ **$P(v) = 3P^4 - 4P^3 + 1$**

Para distintos valores de P la probabilidad de vuelo en los dos tipos de aviones se observa en la siguiente tabla, la cuál muestra el comportamiento en las probabilidades y se observa que a menos probabilidad de falla el mas seguro es el avión cuatrimotor, y a mayor probabilidad de falla los bimotores, por lo que se concluye que son mas seguros los aviones bimotores.

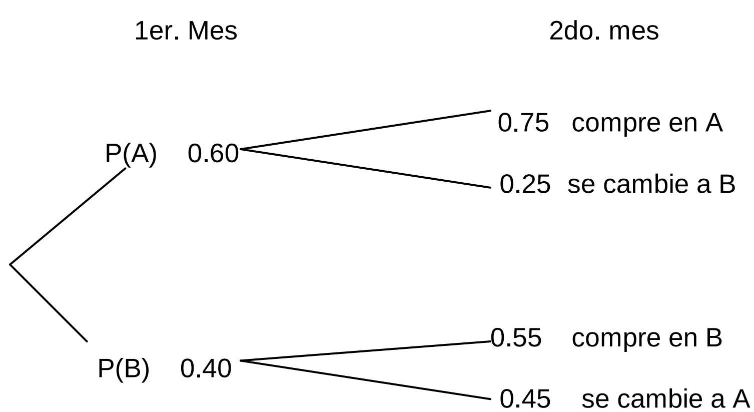
VALORES DE P	AVION BIMOTOR	AVION. CUATRIMOTOR
0.05	0.9975	0.99951875
0.1	0.99	0.9963
0.2	0.96	0.9728
0.3	0.91	0.9163
0.4	0.84	0.8208
0.5	0.75	0.6875
0.6	0.64	0.5248
0.7	0.51	0.3483
0.8	0.36	0.1808
0.9	0.19	0.0523
0.95	0.0975	0.01401875

PROBABILIDAD CONDICIONAL

9. Durante el mes cero cierto producto es preferido por el 60% del mercado y otros varios por el resto. Los clientes compran una vez al mes . Si alguien compra el producto A, la probabilidad que lo vuelva a comprar en el siguiente mes es de 75% y de un 25% de que se cambie. Si un cliente compra un producto de la competencia en un mes la probabilidad que se cambie al producto A es de 45% y 55% de que permanezca fiel a la marca de la competencia. Encuentre el porcentaje de participación esperado en el mercado por A al final del segundo mes.

SOLUCION:

Aquí realizaremos un diagrama de árbol donde definiremos primero la probabilidad de aceptación en el primer mes por el producto A que en este caso seria el 60%, y el 40% seria el del producto de la competencia.
Para sacar las probabilidades del segundo mes primero debemos de hacerlo para el producto A donde del 60% que compran aquí el 75% sigue comprando este producto y el 25% se cambia al otro producto. Para los que en el primer mes compraron el producto de la competencia que era el 40% , en el segundo mes que compraron el 45% se cambio al producto A y el 55% siempre compró el producto de la competencia , tomando encuentra que el porcentaje es igual a la probabilidad de cada uno por lo que nuestro diagrama del árbol quedaría de esta forma:



En este caso solo nos interesa que en el segundo mes o sea al final los clientes compren el producto A, esto quiere decir, que solo vamos a tomar encuentra los porcentajes de aceptación del producto A, ya sea que desde el inicio compro el producto A o no pero que al final si compro A.
Por lo que nos quedaría de esta forma:

P(C) = (0.6*0.75) + (0.4*0.45) = **0.63**

Donde el primer paréntesis representa que al inicio prefiere A y luego permanece en A, y el segundo paréntesis representa que al inicio prefiere B pero que luego al final prefiere A. Obteniendo así las 2 formas donde terminan comprando al final el producto A.

También se puede hacer de la siguiente forma:

$P(C) = (A_1 \cap A_2) \; U \; (B_1 \cap A_2)$
$P(C) = P(A_1) * P(A_2/A_1) + P(B_1) * P(A_2/B_1)$

En donde;
P(A)= 0.6
P(B)= 0.4
$P(A_2/A_1) = 0.75$
$P(B_2/A_1)= 0.25$
$P(B_2/B_1)= 0.55$
$P(A_2/B_1)= 0.45$

Por lo que nos quedaría de la siguiente forma;
P(C) = (0.6) * (0.75) + (0.4) * (0.45) = **0.63**

VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENCIONALES DISCRETAS:

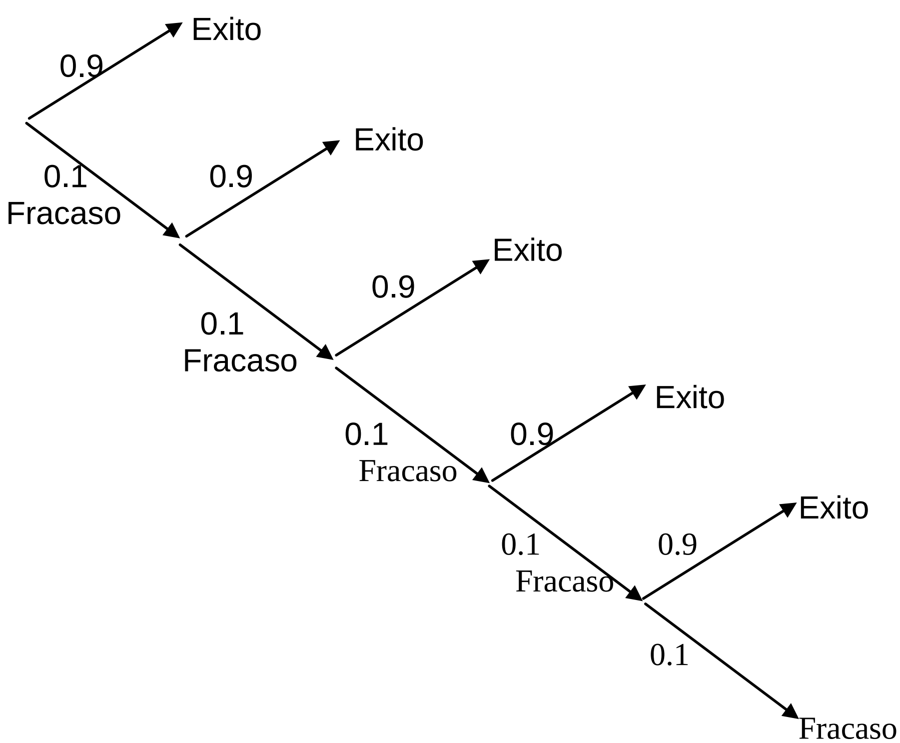
Distribución de Probabilidades.

10. Se lanza una serie de cohetes hasta que el primer lanzamiento sea exitoso. Si esto no ocurre en 5 ensayos el experimento se detiene. Suponga que hay una probabilidad constante de 0.9 de tener un lanzamiento exitoso y los ensayos son independientes.
El costo del primer lanzamiento es K quetzales, mientras que los lanzamientos siguientes cuestan K/3 quetzales. Cada vez que hay un lanzamiento exitoso se obtiene un beneficio de C quetzales. Si T es el costo del experimento, encuentre la distribución de probabilidades de T.

Eventos	f(T)	f(P)
1	K	0.9
2	4K/3	0.09
3	5K/3	0.009
4	2K	0.0009
5	7K/3	0.00009+.00001

Un quinto intento con fracaso

Eventos	f(T)	f(P)
5	7K/3	0.00001



11. De 5 trabajadores de una fabrica uno mide 5.7', uno 5.6', dos miden 5.5´y el otro mide 5.0´. Se escogen 2 trabajadores al azar sin reemplazo. Sea Z la variable aleatoria que representa la estatura promedio de los trabajadores escogidos. Hallar:

a) La distribución de probabilidades de Z y graficarla;
b) La función de distribución acumulada de Z y graficarla
c) P (Z < 5.4)

<u>PLANTEAMIENTO</u>

- Se tienen 5 trabajadores:

#	ESTATURA	TRABAJADOR
1	5.7'	A
2	5.6'	B
3,4	5.5'	C,D
5	5.0'	E

- Se seleccionan 2 trabajadores al azar sin reemplazo.
- Z = altura promedio de los trabajadores
- Para encontrar el numero de formas de seleccionar 2 trabajadores, se utilizan combinaciones ya que no nos importa el orden, es selección al azar y sin reemplazo, por lo que tenemos:

$${}_5C_2 = 10$$

Por lo que nos queda el siguiente conjunto de soluciones:

R_Z = {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}

Y por consiguiente tendremos el siguiente promedio de estaturas para cada solución:

RZ = {5.65, 5.6, 5.6, 5.35, 5.55, 5.55, 5.3, 5.5, 5.25, 5.25}

SOLUCION:

a) y b) Para la solución de estos dos incisos es necesario elaborar una tabla que nos indique la probabilidad de cada una de las alturas promedios antes encontradas, así como también a partir de estas probabilidades se calculan las acumuladas que nos servirán para la solución del inciso b). Para el calculo de estas probabilidades se utilizara la siguiente formula:

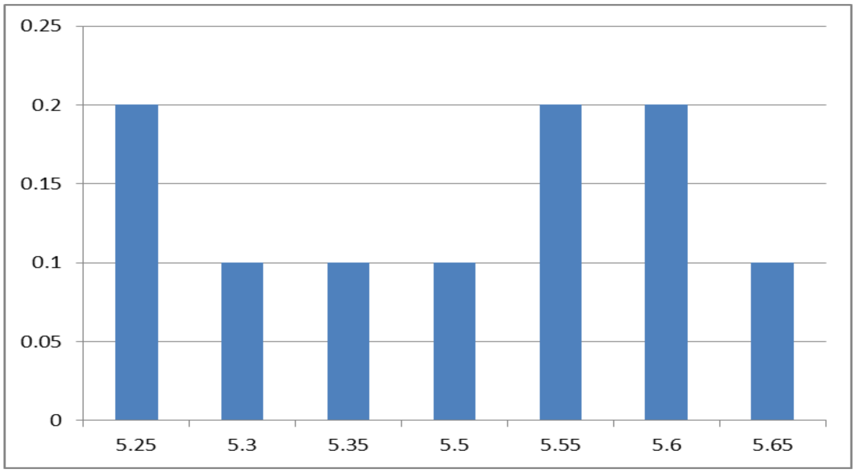
$$P(Z) = n / 10$$

Donde:

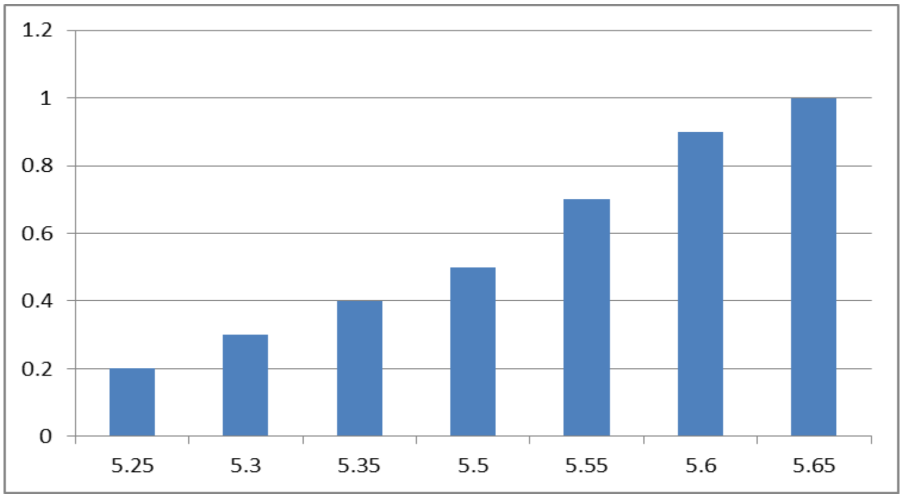
n = # de veces que aparece la estatura promedio en el conjunto de soluciones antes descrito

Z	P(Z)	A(Z)
5.25	0.2	0.2
5.3	0.1	0.3
5.35	0.1	0.4
5.5	0.1	0.5
5.55	0.2	0.7
5.6	0.2	0.9
5.65	0.1	1.0

Distribución de probabilidades



Distribución de probabilidades acumulada



Esperanza Matematica.

12. **Los registros de una compañía de Seguros de automóviles dan la siguiente información sobre accidentes: la probabilidad de que un conductor asegurado tenga un accidente es de 0.15, si ocurre un accidente, la magnitud del daño al vehículo es el 20% de su valor con probabilidad 0.8, 60% del valor con probabilidad 0.12 y pérdida total con probabilidad 0.08. Qué prima debe cobrar la companía por un automóvil de Q 40,000 para que la ganancia esperada de la compañía sea cero?**

SOLUCION:

1) Inicialmente, para que la compañía tenga ganancia cero, implica que lo que cobre es lo mismo que pague por daño a un vehículo

2) Hay dos eventos que deben ocurrir: que tenga un accidente y el grado de daño, si es que tiene el accidente, por lo tanto, se multiplica 0.15 por cada una de las probabilidades, así por ejemplo, la probabilidad de que el daño sea del 20% es la probabilidad de que tenga accidente multiplicada por la probabilidad de que el daño sea de 20% dado que tiene un accidente, finalmente se construye una nueva tabla:

% DAÑO	20%	60%	100%	0%
PROB. OCURRENCIA.	0.12	0.018	0.012	0.85

3) con esta información se calcula la esperanza de daño:

20*.12+60*.018+100*.012 + 0*0.85 =4.68%

4) Finalmente, se multiplica el daño esperado por el precio del vehículo:

Precio a cobrar= Q40,000*.0468=Q 1872

13. Juan Pérez, director de las publicaciones de los Orioles de Villa Nueva está tratando de decidir cuántos programas imprimir para la próxima serie de juegos que el equipo sostendrá contra los Dodgers de Amatitlán. La impresión de cada programa cuesta Q 0.25, se venden a Q 1.25. Los programas que no se venden deben ser eliminados al terminar la serie. El señor Pérez estima la siguiente distribución de probabilidades para las ventas del programa:

Volumen de Ventas	*25,000*	*40,000*	*50,000*	*70,000*
Probabilidad	*0.10*	*0.30*	*0.45*	*0.15*

Si debe decidir entre 25,000, 40,000, 50,000, 70,000, cuál debe ser el tiraje recomendable para maximizar las ganancias esperadas?

SOLUCION:

1) Se identifican los siguientes costos: Costo de la impresión Q0.25, Costo de pérdida de oportunidad por faltantes Q1.25 - Q0.25 = Q1.00

2) Se calcula para todas las posibles alternativas para el tiraje el valor esperado de la ganancia.

Para un tiraje de 25000 ejemplares

Ventas	Probabilidad	Ingresos	Costos	Ganancia
25000	0.10	31250	6250	25000
40000	0.30	31250	6250+15000	10000
50000	0.45	31250	6250+15000	0000
70000	0.15	31250	6250+ 25000	- 2000

Ganancia esperada Q2500

Para un tiraje de 40000 ejemplares

Ventas	Probabilidad	Ingresos	Costos	Ganancia
25000	0.10	31250	10000	21250
40000	0.30	50000	10000	40000
50000	0.45	50000	10000+10000	30000
70000	0.15	50000	10000+ 30000	10000

Ganancia esperado Q29125

Para un tiraje de 50000 ejemplares

Ventas	Probabilidad	Ingresos	Costos	Ganancia
25000	0.10	31250	12500	18750
40000	0.30	50000	12500	37500
50000	0.45	62500	12500	50000
70000	0.15	62500	12500+ 20000	30000

Ganancia esperado Q40125

Para un tiraje de 70000 ejemplares

Ventas	Probabilidad	Ingresos	Costos	Ganancia
25000	0.10	31250	17500	13750
40000	0.30	50000	17500	32500
50000	0.45	62500	17500	45000
70000	0.15	87500	17500	70000

Ganancia esperado Q41875

3) De acuerdo con la tabla anterior la ganancia máxima esperada ocurre cuando se imprimen 70000 ejemplares.

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENCIONALES DISCRETAS:

Distribución Conjunta de Probabilidades y Esperanza Matematica.

14. Una fábrica tiene funcionando dos máquinas A y B. Si X y Y representan el número de veces que pueden fallar en un día determinado la máquina A y la máquina B respectivamente y C(x) y C(y) representan los costos que implica el número de fallas y cuyas funciones de probabilidad son las siguientes:

X	f(x)	C(x)
1	0.14	30
2	0.42	40
3	0.19	70
4	0.25	100

Y	f(y)	C(y)
1	0.29	35
2	0.71	58

a) Cuál es la probabilidad de que en un día dado falle más la máquina B que la máquina A?
b) Si la máquina A falló menos de cuatro veces Cuál es la probabilidad de que ambas máquinas fallen dos veces?
c) Cuál es la función de probabilidad del número total de fallas que pueden sucederle a la empresa en sus máquinas en determinado día?
d) Cuál es el costo esperado para un día cualquiera en arreglos de descomposturas?

SOLUCION:

Podemos elaborar una distribución conjunta de las variables X & Y. Puesto que dichas variables son independientes:

$$f(x,y) = f(x) * f(y)$$

Y \ X	1	2	3	4	f(y)
1	0.0406	0.1218	0.0551	0.0725	0.29
2	0.0994	0.2982	0.1349	0.1775	0.71
f(x)	0.14	0.42	0.19	0.25	1

a) Simbólicamente lo pedido es : P(Y > X), evento que sucede únicamente cuando Y=2 y X= 1, por lo tanto la probabilidad pedida es P(X=1 y Y=2) que es f (1,2)= 0.0994.

b) Si definimos los siguientes eventos:
A: Evento que consiste en que la máquina A falle 2 veces y que la máquina B falle 2 veces.
B: Evento que consiste en que la máquina A falle menos de 4 veces.

Entonces:

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = f(2, 2) / [g(1) + g(2) + g(3)]$

$= 0.2982 / (0.14+0.42+0.19) = 0.3976$

R/ La probabilidad es de 0.3976

c) Cuál es la función de probabilidad del número total de fallas que pueden sucederle a la empresa en sus máquinas en determinado día?

Si T = Número total de fallas,
T = {2, 3, 4, 5, 6}

Entonces :

$P(T=2) = f(1,1) = 0.0406$
$P(T=3) = f(1,2) + f(2,1) = 0.0994 + 0.1218 = 0.2212$
$P(T=4) = f(2,2) + f(3,1) = 0.2982 + 0.0551 = 0.3533$
$P(T=5) = f(3,2) + f(4,1) = 0.1349 + 0.0725 = 0.2074$
$P(T=6) = f(4,2) = 0.1775$

Por consiguiente la distribución de probabilidad es:

T	$f(T)$
2	0.0406
3	0.2212
4	0.3533
5	0.2074
6	0.1775

d) Sea Z (X, Y) la variable de costo, que combine el costo de las dos máquinas:
$Z(X,Y) = C(x) + C(y)$, siendo la probabilidad de Z igual a $f(x,y)$:
Podemos elaborar la siguiente distribución de probabilidad del costo de Z:

Z(x,y) = C(x) + C(y)	$f(Z) = f(x,y)$	$Z * f(Z)$
Z(1,1) = 65	0.0406	2.369
Z(1,2) = 88	0.0994	8.7472
Z(2,1) = 75	0.1218	9.135
Z(2,2) = 98	0.2982	29.2236
Z(3,1) = 105	0.0551	5.7855
Z(3,2) = 128	0.1349	17.2672
Z(4,1) = 135	0.0725	9.7875
Z(4,2) = 158	0.1775	28.045
		Σ=110.36

R/ El costo esperado es de Q 110.36.

VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENCIONALES CONTINUAS:

Distribución de Probabilidades, Esperanza Matematica y Varianza.

15. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x < 1 \\ a & 1 \leq x < 2 \\ -ax + 3a & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{En otro punto} \end{cases}$$

Hallar:

a) El valor de a
b) $P(1.5 \leq x \leq 2.5)$
c) La función de distribución
d) La esperanza matemática
e) La variancia

SOLUCION:

a) Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d(x) = 1$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 axd(x) + \int_1^2 ad(x) + \int_2^3 a(3 - x)d(x) = 1$$

Integrando nos queda

$$a(x^2/2)\Big|_0^1 + ax\Big|_1^2 + a(3x - x^2/2)\Big|_2^3 = 1$$

Valuando en los limites correspondientes

$$a(1/2) + a(2 - 1) + a[(9 - 9/2) - (6 - 2)] = 1$$

Operamos

$$1/2a + a + (9/2 - 4)a = 1 \Rightarrow a/2 + a + a/2 = 1$$

$2a = 1 \Rightarrow$ **$a = 1/2$**

Por lo tanto la función f(x) resulta:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2x & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 3/2 - 1/2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{En otro punto} \end{cases}$$

b) $P(1.5 \leq x \leq 2.5) = ?$

Tenemos que:

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)d(x)$$

Como el intervalo de probabilidad corresponde al segundo y tercer términos de la función de densidad valuamos directamente en estos.

$$P(1.5 \leq x \leq 2.5) = \int_{1.5}^{2} 1/2d(x) + \int_{2}^{2.5} 1/2(3-x)d(x)$$

Integramos

$$P(1.5 \leq x \leq 2.5) = 1/2x \Big|_{1.5}^{2} + 1/2(3x - x^2/2) \Big|_{2}^{2.5}$$

Evaluamos los limites

$P(1.5 \leq x \leq 2.5) = 1/2(2 - 1.5) + 1/2[(7.5 - 3.125) - (6 - 2)]$

Operando

$P(1.5 \leq x \leq 2.5) = 0.25 + 1/2(4.375 - 4) \Rightarrow P(1.5 \leq x \leq 2.5) = 0.25 + 0.1875$

$P(1.5 \leq x \leq 2.5) = 0.4375$

c) Tenemos la función de distribución de probabilidad o función de distribución acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)d(t)$$

Por lo tanto para el intervalo $1 \leq x < 2$ tenemos

$$F(x) = \int_{0}^{x} (1/2t)d(t)$$

Integrando

$$F(x) = 1/2(t^2/2) \Big|_{0}^{x}$$

Valuando los limites

$$F(x) = 1/4x^2$$

Para el intervalo $1 \leq x \leq 2$ tenemos

$$F(x) = \int_{0}^{1} (1/2t)d(t) + \int_{1}^{x} (1/2)d(t)$$

Integrando

$$F(x) = 1/4(t^2) \Big|_{0}^{1} + 1/2(t) \Big|_{1}^{x}$$

Valuando

$$F(x) = 1/4 + 1/2x - 1/2$$

Operando resulta

$$F(x) = 1/2x - 1/4$$

Para el resto de la función

$$F(x) = \int_0^1 (1/2t)d(t) + \int_1^2 1/2d(t) + \int_2^x 1/2(3 - t)d(t)$$

Integrando nos queda

$$F(x) = 1/2(t^2/2)\Big|_0^1 + 1/2t\Big|_1^2 + 1/2(3t - t^2/2)\Big|_2^x$$

Valuando en los limites correspondientes

$$F(x) = 1/4 + 1 - 1/2 + 1/2[(3x - x^2/2) - (6 - 2)]$$

Operando

$F(x) = 1/4 + 1/2 + 3/2x - x^2/4 - 2$

$F(x) = - x^2/4 + 3/2x - 5/4$

Por lo tanto la función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 1/4x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1/2x - 1/4 & 1 \le x \le 2 \\ - x^2/4 + 3/2x - 5/4 & 2 < x \le 3 \\ 0 & \text{En otro punto} \end{cases}$$

d) E(x) = ?

Sabemos que

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)d(x)$$

Por lo tanto:

$$E(x) = \int_{0}^{1} x(1/2x)d(x) + \int_{1}^{2} x(1/2)d(x) + \int_{2}^{3} x[1/2(3 - x)]d(x)$$

Integrando:

$$E(x) = 1/2(x^3/3)\Big|_{0}^{1} + 1/2(x^2/2)\Big|_{1}^{2} + 1/2(3/2\ x^2 - x^3/3)\Big|_{2}^{3}$$

Valuando los limites

$$E(x) = 1/6 + 3/4 + 1/2[(27/2 - 9) - (6 - 8/3)]$$

Operando

$$E(x) = 1/6 + 3/4 + 1/2(9/2 - 10/3) \Rightarrow E(x) = 1/6 + 3/4 + 9/4 - 10/6$$

$\Rightarrow E(x) = 18/12 \Rightarrow$ **$E(x) = 1.5$**

e) V(x) = ?

Sabemos que:

$$\sigma^2(x) = E(x^2) - \mu^2$$

Calculando $E(x^2)$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)d(x)$$

Por lo tanto:

$$E(x^2) = \int_{0}^{1} x^2\,(1/2x)d(x) + \int_{1}^{2} x^2\,(1/2)d(x) + \int_{2}^{3} x^2\,[1/2(3 - x)]d(x)$$

Integrando:

$$E(x^2) = 1/2(x^4/4)\Big|_0^1 + 1/2(x^3/3)\Big|_1^2 + 1/2(3/3\ x^3 - x^4/4)\Big|_2^3$$

Valuando los limites

$E(x^2) = 1/8 + 7/6 + 1/2[(27 - 81/4) - (8 - 4)]$

Operando

$E(x^2) = 1/8 + 7/6 + 1/2(27/4 - 4) \Rightarrow E(x^2) = 1/8 + 7/6 + 11/8$

$\Rightarrow E(x^2) = 64/24 \Rightarrow$ **$E(x^2) = 2.67$**

Entonces:

$\sigma^2(x) = E(x^2) - \mu^2$

Sustituyendo valores:

$\sigma^2(x) = 8/3 - (3/2)^2 \Rightarrow$ **$\sigma^2(x) = 5/12 = 0.42$**

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENCIONALES CONTINUAS:

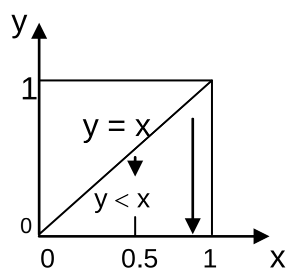
Distribuciones de Probabilidad, Distribución Marginal y Esperanza Matematica.

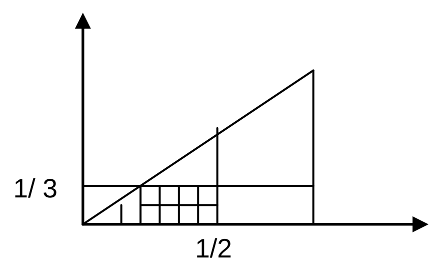
16.Si x,y son variables aleatorias continuas con funcion de densidad de Probabilidad:

$$\mathbf{f(x,y) = 18x^2y^2 \qquad 0\leq x \leq 1 \; ; \; 0\leq y \leq x}$$

a) encuentre la probabilidad P(x<1/2, y<1/3)
b) la distribución marginal de x
c) la distribución marginal de y

RECORRIDO XY





a) **P(x <1/2, y < 1/3) =** P(0≤ x ≤1/3, 0≤ y ≤x) + P(1/3≤ x ≤1/2, 0≤ y ≤1/3)

$$= \int_0^{1/3}\int_0^{x} 18x^2y^2dydx \; + \int_{1/3}^{1/2}\int_0^{1/3} 18x^2y^2dydx$$

$$= 0.0013717 + 0.0065157$$
$$= 0.007887$$

b) $\mathbf{g(x) =} \int_0^{x} 18x^2y^2dy = 18/3\ x5 \qquad 0\leq x \leq 1$

c) $\mathbf{h(y) =} \int_y^{1} 18x^2y^2dx = 6y^2(1 - y^3) \qquad 0\leq y \leq 1$

17. Una cafetería de servicio tanto a clientes que llegan en automóvil como a los que llegan caminando. En un día elegido al azar, sean x,y respectivamente, las proporciones del tiempo en las que se utilizan las instalaciones para atender automovilistas y a los que llegan caminando. Suponga que la función de densidad conjunta de las variables esta dada por:

$$f(x,y) = 2/3(x + 2y) \qquad 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

Encuentre la probabilidad de que las instalaciones para atender a los que llegan caminando estén ocupados menos de la mitad del tiempo.

$$g(y) = \int_0^1 2/3(x + 2y)dx = 1/3 + 4/3y \qquad 0 \leq y \leq 1$$

$$P(y < 0.5) = \int_0^{0.5} (1/3 + 4/3y)dy = 1/3$$

18. En cierto proceso, para elaborar una substancia quimica, el producto final Contiene dos tipos de impurezas. En una muestra de este producto "x" denota la proporcion de impurezas y "y" la proporcion de impurezas tipo 1, entre todas las impurezas encontradas. Suponga que se puede elaborar un modelo de la distribución conjunta x,y mediante la funcion:

$$f(x,y) = 2(1 - x) \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$$

Encuentre el valor esperado de la proporcion de impurezas tipo 1 en la muestra.

SOLUCION:

Sea Z la variable proporcion de impurezas tipo 1 en la muestra:

Z = xy

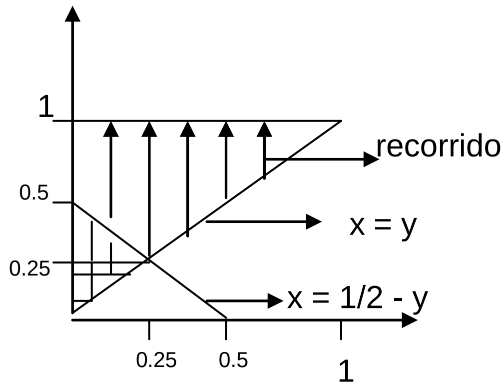
$$E(z) = E(xy) = \int_0^1 \int_0^1 (xy)(2(1 - x))dydx$$

$$= \int^1 \int^1 2xy(1 - x)dydx = 1/6$$

19.Si x,y tienen funcion de densidad conjunta:

$f(x,y) = 1/y \qquad 0 < x < y \; ; \; 0 < y < 1$

Encuentre:
$P(x+y > 1/2)$



$x+y > 1/2$
$y > 1/2 - x$
$x > 1/2 - y$

$P(x+y > 1/2) =$ $1 - P(x+y < 1/2)$

$$= 1 - \left[\int_0^{0.25} \int_0^{y} 1/y \, dxdy + \int_{0.25}^{0.5} \int_0^{0.5-y} 1/y \, dxdy \right]$$

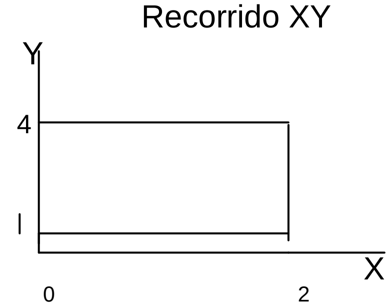
$P(x+y > 1/2) =$ $1 - 0.3465 = 0.6535$

20. Dos variables aleatorias tienen una densidad conjunta dada por:

$f(X) = K(X^2 + Y^2) \qquad 0 \le X \le 2$
$1 \le Y \le 4$

A) Encuentre el valor de la constante K.
B) Encuentre la probabilidad de $P(1 \le X \le 2, 2 \le Y \le 3)$
C) Encuentre la probabilidad $P(X + Y > 4)$

A)



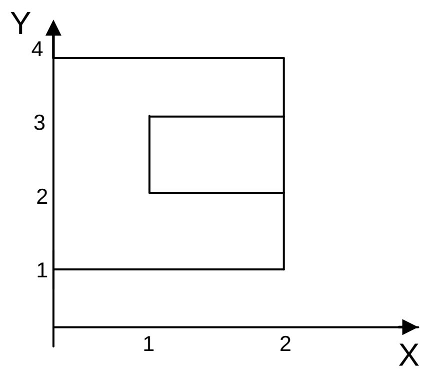
$P(0 \leq X \leq 2 , 1 \leq Y \leq 4)$

$$\int_0^2 \int_1^4 K (X^2 + Y^2)\, dx\, dy = 1$$

Entonces: $50 K = 1$
$K = 1/50$

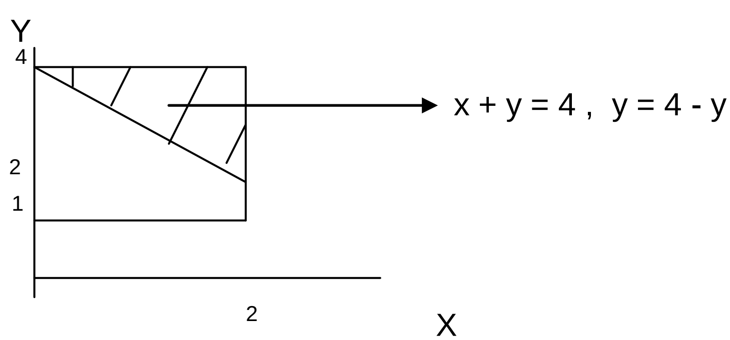
$f (XY) = 1/50 \; (X^2 + Y^2)$

B) $P (1 \leq X \leq 2 , 2 \leq Y \leq 3) = \int_1^2 \int_2^3 1/50 \; (X^2 + Y^2)\, dy\, dx = 26/150$



C) $P (X + Y > 4) = P (0 \leq X \leq 2 , \; 4\text{-}X \leq Y \leq 4) = \int_0^2 \int_{4-X}^4 1/50 \; (X^2 + Y^2)\, dy\, dx$

$= 0.533$



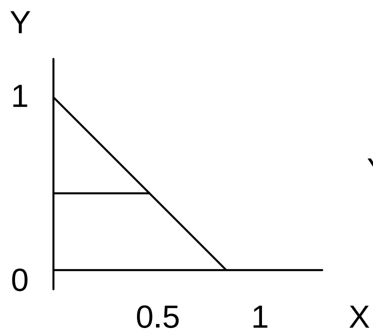
21. La funcion de densidad conjunta para las variables aleatorias (XY) es:

$f(XY) = 6X$, cuando $0 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1 - X$.

Encuentre la probabilidad de que X sea mayor que 0.3 dado que Y es Igual a 0.5.

$$f(XY) = 6X \qquad 0 \le X \le 1 \qquad 0 \le Y \le 1-X$$

$$P(X > 0.3 \,/\, Y = 0.5)$$



$$Y = 1 - X \qquad\qquad X = 1 - Y$$

$$g(Y) = \int_0^{1-Y} 6X\,dx = \left.\frac{6X^2}{2}\right]_0^{1-Y} = \frac{6(1-Y)^2}{2} = 3(1-Y)^2$$

$$f(X/Y) = \frac{6X}{3(1-Y)^2} \qquad\qquad f(X/Y = 0.5) = \frac{6X}{0.75} = 8X$$

cuando $0 \le X \le 0.5$

$$P(X > 0.3 \,/\, Y = 0.5) = \int_{0.3}^{0.5} 8X\,dx = 0.64$$

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS ESPECIALES:

22. El lanzamiento de un cohete se considera seguro después de que se han realizado tres pruebas exitosas. La probabilidad de una prueba con éxito es de 0.8.

a) Que probabilidad hay de obtener 3 éxitos en 6 pruebas del cohete?
b) Cual es la probabilidad de que el primer éxito se obtenga en la tercera prueba?
c) Al completar las tres pruebas con éxito, el cohete es lanzado. Este lanzamiento proporciona una información que obtiene ingresos por Q.200,000 y para cada prueba se invierten Q.10,000. Cual es la ganancia esperada en cada lanzamiento de un cohete?

SOLUCION:

a) Este es un caso de distribución Binomial, ya que tenemos:
- Pruebas independientes
- Éxito o fracaso
- No interesa el orden
- X = # de éxitos en "n" pruebas
- p = probabilidad de éxito es constante
- q = 1 - p

Entonces la probabilidad que buscamos es:

n = 6
X = 3
p = 0.8
q = 0.2

$$\mathbf{P(X = 3) =} \ {}_6C_3(0.8)^3(0.2)^3 = 0.08192$$

b) Este es un caso de distribución Geométrica, ya que tenemos:
- Pruebas independientes
- Éxito o fracaso
- Interesa el "primer" éxito
- X = # de pruebas hasta obtener el "primer" éxito
- p = probabilidad de éxito es constante
- q = 1 - p

Entonces la probabilidad que buscamos es:

X = 3
p = 0.8
q = 0.2

$$\mathbf{P(X = 3) =} (0.8)(0.2)^{3-1} = 0.032$$

c) Para la solución de este inciso, se debe de plantear primeramente una ecuación matemática que nos permita conocer la ganancia esperada en un determinado numero de pruebas.

El problema nos dice que el cohete es lanzado al haber obtenido 3 pruebas con éxito, lo que representa tener un ingreso de Q.200,000 por cada lanzamiento y nos dice que en cada prueba se invierten Q.10,000.

Puesto que no se conoce el # de pruebas necesarias para conseguir las 3 pruebas exitosas, entonces tenemos que involucrar un variable que afecte al dinero invertido en cada prueba, a esta variable la llamaremos X y nos representara el # de pruebas necesarias para obtener 3 éxitos. Por lo que la ecuación que se necesita para este problema nos queda de la siguiente forma:

G = 200,000 - 10,000X

Donde:

G = ganancia esperada
X = numero de pruebas realizadas hasta obtener los 3 éxitos

Puesto que X representa una variable de distribución de Pascal, aplicamos E(x) a toda la ecuación y nos quedara de la siguiente forma:

E(G) = 200,000 - 10,000E(X)

Donde:

E(X) = r / p

Entonces la ganancia esperada es de:

r = 3
p = 0.8

E(G) = 200,000 - 10,000(3 / 0.8) = Q.162,500

23. El número de buques tanques, N, que llegan cada día a cierta refinería tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Las actuales instalaciones portuarias pueden despachar tres buques al día. Si más de tres buques llegan en un día, los que están en exceso deben enviarse a otro puerto.

a) En un día determinado, cuál es la probabilidad de tener que hacer salir buques tanques?

SOLUCION:

Como el máximo diario que se puede atender es tres, significa que si llegan más de tres será necesario desviarlos. Por lo tanto, se reduce a calcular $P(N \leq 3)$ Usando la distribución de Poisson:

$$P(N\leq 3)=P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3)$$

$$P(N > 3) = 1 - \left(\frac{e^{-2} * 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} * 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} * 2^2}{2!} + \frac{e^{-2} * 2^3}{3!} \right)$$

$$P(N > 3) = 1 - (0.1353 + 0.2706 + 0.2706 + 0.1804) = 0.1431$$

b) En cuánto deben aumentarse las instalaciones actuales para asegurar con una probabilidad del 90% la atención de los buques tanques que lleguen?

SOLUCION:

En esta caso, debe calcularse las probabilidades acumuladas para 3,4,5.... buques, lo cual se facilita en la siguiente tabla:

BUQUES	P(X=N)	ACUM. P(x≤N)
N=3	0.1804	0.8569
N=4	0.0902	0.9407
N=5	0.0360	0.9834

Conclusión: Si se aumenta la capacidad a 4 barcos diarios, se tiene más del 90% de probabilidad, lo que equivale a la capacidad de atención diaria de más de 90% de los días.

c) Cuál es el número esperado de buques tanques que llegan al día?

Respuesta: 2 (lambda es la media o valor esperado)

d) Cuál es el número más probable de buques que llegan al día?

Respuesta: 1 o 2 tienen la misma probabilidad de ocurrir.

e) Cuál es el número esperado de buques atendidos diariamente

SOLUCION: en la refinería pueden atender como máximo 3 buques tanques. Si la variable aleatoria Y es el número de buques atendidos, Y tiene la siguiente Distribución de Probabilidades

Y	0	1	2	3
P(Y)	0.1353	0.2706	0.2706	0.3235

El numero esperado de buques atendidos es 1.7823

f) Cuál es el número esperado de buques devueltos diariamente?

SOLUCION: Los buques son devueltos cuando llegan más de 3. Z es la variable número de buques devueltos y tiene la siguiente distribución de probabilidades

Z	0	1	2	3	4	5	6	7 o más
P(Z)	0.8571	0.0902	0.036	0.012	0.0034	0.0009	0.0002	aprox.0

El valor esperado de Z es aproximadamente 0.217

24.El juego de Juan con Suerte se juega como sigue: Se tiran 3 dados legales y el jugador apuesta Q1.00 a la ocurrencia del numero 5. Entonces si ocurre un 5 en alguno de los tres dados, gana Q.2.00. Si aparecen dos 5 gana Q.3.00, y si aparecen tres 5 gana Q4.00 de lo contrario pierde el quetzal. Si una persona juega 5 veces consecutivas, ¿Cuál es la probabilidad que 2 veces gane Q.3.00, una vez Q2.00 y una vez pierda el quetzal?

<u>PLANTEAMIENTO</u>

- Tiran 3 dados legales y el jugador apuesta Q.1.00 a la ocurrencia del #5 y sabemos que por la ocurrencia de:

Un 5 $\rightarrow$ gana Q.2.00
Dos 5 $\rightarrow$ gana Q.3.00
Tres 5 $\rightarrow$ gana Q.4.00
Ningún 5 $\rightarrow$ pierde Q1.00

- Si X es la variable aleatoria ganancia del juego,
- Si Y representa el numero de cincos que aparecen en el lanzamiento, entonces:

Procedemos a calcular las probabilidades para cada una de las apariciones del #5.

Por no importar el orden de aparición y existir pruebas independientes, las probabilidades se calculan en base a una distribución binomial y nos quedan de la manera siguiente:

Y	P(Y)
0	${}_3C_0(1/6)^0(5/6)^3$ = 0.5787
1	${}_3C_1(1/6)^1(5/6)^2$ = 0.3472
2	${}_3C_2(1/6)^2(5/6)^1$ = 0.06944
3	${}_3C_3(1/6)^3(5/6)^0$ = 0.004629

Por consiguiente la distribución de probabilidades para la variable X es:

X	P(X)
4	0.004629
3	0.06944
2	0.3472
-1	0.5787

PREGUNTA

Cual es la probabilidad de que 2 veces gane Q.3.00, una vez gane Q.2.00 y una vez pierda Q.1.00?

SOLUCION:

Este es un caso de distribución Multinomial, ya que existen:

- Pruebas independientes
- Varios resultados posibles
- No interesa el orden
- X_1 = # de veces que aparece tres 5 en "n" lanzamientos
- X_2 = # de veces que aparece dos 5 en "n" lanzamientos
- X_3 = # de veces que aparece un 5 en "n" lanzamientos
- X_4 = # de veces que aparece ningún 5 en "n" lanzamientos
- P = probabilidad que tiene cada aparición del numero 5

$$\mathbf{P(X_1=n_1;\ X_2=n_2;\ X_3=n_3) =} \frac{n!}{n1!n2!n3!\ldots} P1^{n1}P2^{n2}P3^{n3}\ldots.$$

Entonces con:

$n = 5$

$X_2 = 2$ $P_2 = 0.06944$

$X_3 = 1$ $P_3 = 0.3472$

$X_4 = 1$ $P_4 = 0.5787$

$$\mathbf{P(X_2=2;\ X_3=1;\ X_4=1) =} \frac{5!}{2!1!1!} (0.06944)^2(0.3472)(0.5787) = 0.058130$$

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS ESPECIALES:

25.Las bombillas eléctricas de una fabrica han presentado una duración media de 1000 hrs. El fabricante garantiza una duración mayor de 900 hrs, en caso contrario devuelve la bombilla perdiendo Q 0.30 y gana Q 0.20 por bombilla que vende cumpliendo la garantía. De la producción de un día, que es de 1000 bombillas prueba 1. Determine:

a) ¿La probabilidad de que cumpla la garantía.
b) ¿Que utilidad puede esperar en la producción diaria de 1000 bombillas.

SOLUCION:

Por los datos que nos dan el problema se resuelve por la distribución exponencial por lo que debemos de aclarar primero que es cada dato que nos dan:

X = duración de las bombillas eléctricas con una desviación exponencial.
μ = 1000 = E (x)
λ = 1 / E (x) = 1/1000

Se garantiza una duración mayor de 900 hrs.

P(t < 900) entonces pierde Q 0.30

P(t > 900) entonces gana Q 0.20

N = 1000 bombillas de la producción de un día.

Por lo que nuestra formula exponencial es:

$P(t < 900) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-(1/1000)*900} = 1 - 0.4065 = \underline{\mathbf{0.5934}}$

$P(t > 900) = e^{-\lambda t} = e^{-(1/1000)*900} = \underline{\mathbf{0.4065}}$ --

a) La probabilidad que se cumpla la garantía es 0.4065

Sea U la utilidad de la empresa por la ganancia o pago de garantía.

U	P(U) por bombilla
0.20	0.4065
-0.30	0.5934

E (U) = - 0.0972

b) por lo que la utilidad esperada para la producción.
en 1000 bombillas = -97.2

26. Suponer que se obtienen barras de chocolate de 1/2 libra, con una maquina apartir de pedazos más grandes. Si se supone que los pedazos más grandes son de densidad uniforme y si la longitud de la barra es exactamente 3 3/8 de pulgada, entonces la barra pesa 1/2 libras. Suponga que la longitud real X de una barra tiene la misma probabilidad de estar comprendida en el intervalo 3.35 y 3.45 pulgadas. Suponiendo que las longitudes cortadas por esta maquina son independientes; Cuál es la probabilidad de que de 4 barras determinadas dos pesen menos de 1/2 libras y 2 mas de 1/2 libras.

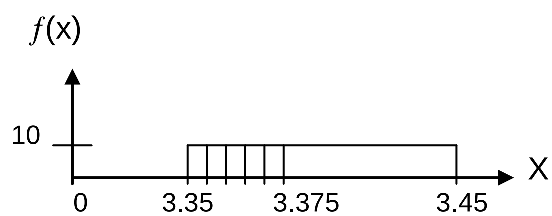
SOLUCION:

Primero debemos de tomar encuentra los datos que nos dan para entender que es lo que se nos esta preguntando.

Si la longitud de la barra es 3 3/8 pulgadas, pesa 1/2 libras, entonces;

X = longitud de la barra, que tiene una distribución uniforme entre $3.35 \leq X \leq 3.45$ pulg.

Ya teniendo claro por que forma se va a trabajar procedemos a calcular las probabilidades que nos piden:
P(pesen menos de 1/2 libras) = P(mide menos de 3.375 pulg.)
P(pesen mas de 1/2 libras) = 1 - P(pesen menos de 1/2 libras)



$P(X \leq 3.375) = (3.375 - 3.35)10$

$P(X \leq 3.375) = 0.25$

$P(X > 3.375) = 0.75$

Suponiendo que las longitudes cortadas son independientes entonces;
Si n = 4 barras la probabilidad de que 2 pesen menos de 1/2 libras y 2 pesen mas de 1/2 libras es:

Y= numero de barras que pesan menos de 1/2 libras

$P(Y=2) = {}_4C_2 * 0.25^2 * 0.75^2 = \underline{\mathbf{0.2109}}$

27. Suponga que X, el largo de una varilla, tiene una distribución normal con media 10 pulgadas y variancia 4 pulgadas cuadradas. En vez de medir el valor de x, sólo se especifica si se cumplen ciertas exigencias. Específicamente, cada varilla fabricada se clasifica como sigue:

A) X menor que 8, B) 8<X<12 y C) X mayor que 12. Si se fabrican 15 de tales varillas, cuál es la probabilidad de que un número igual de varillas caigan en cada una de las categorías anteriores?

SOLUCION:

Si la variancia es 4, entonces la desviación standard es 2. De modo que la distribución normal tiene parámetros:

$\mu=10$ $\sigma=2$

La probabilidad de que las varillas midan menos de 8 pulgadas:

Z= (8-10) / 2 =-1, su área externa es: 0.1587

Por simetría, la probabilidad de midan mas de12 pulgadas también es 0.1587

El área que representa $P(8<X<12)=1-2*0.1587=0.6826$

Si se fabrican 15 varillas y se considera la fabricación de cada una como eventos independientes, la probabilidad de que 5 de ellas midan menos de 8, 5 entre 8 y 12 y las otras 5 midan más de 12 se calcula de acuerdo a la distribución multinomial.

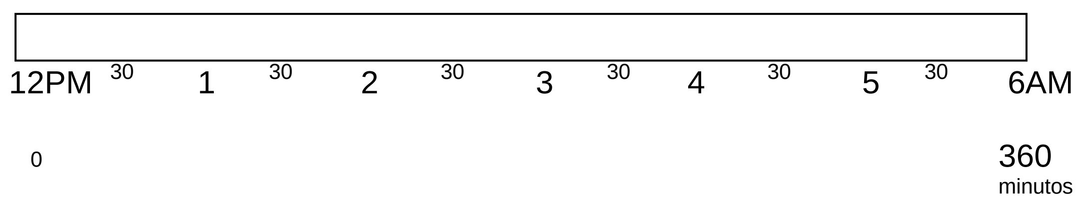
N= 15 $P(X_1 = 5, X_2 = 5, X_3 = 5) = 15! / (5!\,5!5!) * 0.1587^5\ \mathbf{0.1587}^{5} *0.6826^{5}$
$= 0.0011364$

28. Los trenes de cierta línea del Metro corren cada media hora entre media noche y las 6 de la mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que entre en la estación en un tiempo al azar durante ese periodo tenga que esperar por lo menos 20 minutos; esto es el tiempo hasta la salida del siguiente tren sea mayor o igual a 20 minutos?

PLANTEAMIENTO

- Los trenes llegan cada media hora entre las 12 PM y las 6 AM
- Un hombre entra a la estación en un tiempo al azar
- Si X es la variable aleatoria en que el hombre llega, X tiene una distribución uniforme entre las 12 PM y las 6 AM.

$f(x) = 1 / 360$ Donde X = tiempo en minutos



PREGUNTA

Cual es la probabilidad de que el tiempo entre la llegada del hombre y la salida del próximo tren sea mayor o igual a 20 minutos?

SOLUCION:

Para la solución de este problema se debe plantear la probabilidad en base a un intervalo de tiempo menor o igual a 10 minutos, ya que este es el tiempo en el cual el hombre tendría que llegar a la estación luego de haber salido un tren de la misma para poder tener una probabilidad de espera mayor o igual a 20 minutos, por ejemplo ya que en el problema se nos dice que los trenes salen cada 30 minutos. Debe de esperar mas de 20 minutos si llega entre la 1:00 y 1:10.

Del gráfico elaborado en el planteamiento previo, nos damos cuenta que existen 12 intervalos posibles de tiempo en el cual el hombre puede llegar a la estación, en donde cada rectángulo pequeño representa un intervalo de tiempo de 10 minutos, por lo que la probabilidad que buscamos queda planteada de la siguiente manera:

$\mathbf{P(0 < X \leq 10) =}$ $P(0 < X \leq 10) + P(30 < X \leq 40) + P(60 < X \leq 70) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(330 < X \leq 340)$

Puesto que para todos los intervalos la posibilidad es igual, ya que la variable de tiempo siempre es 10 minutos, entonces nos queda lo siguiente:

$$P(0 < X \leq 10) = 10 / 360 = 1 / 36$$

Ya que existen 12 intervalos de tiempo con una longitud de 10 minutos, entonces la probabilidad que buscamos nos queda:

$$P(\text{esperar} \geq 20\text{min}) = 1 / 36 \times 12 = 0.3333$$

29. Una compañía está planeando producir impresoras de matrices de puntos que se emplearán con microcomputadoras. Un problema que afronta es la decisión de fabricar o comprar las cabezas de impresión. Puede comprarlas a un fabricante a $35 cada una o producirlas en su propia planta con costos variables de $24 por unidad. Si opta por lo segundo tendrá que erogarcostos fijos de $28000 al año. Debido a las unidades defectuosas cada impresora requiere 1.15 cabezas de impresión. La compañía prevee que la demanda anual de sus impresoras tendrá una distribución normal con media 3000 unidades y una desviación estándar de 700 unidades.¿Qué probabilidades hay de que el uso requerido de las cabezas de impresión sea suficientemente grande para justificar la producción y no su adquisición? Si la política de la compañía es fabricar los componentes solo cuando hay probabilidad mayor de 60% de que el uso se encuentre 1.5 desviaciones estándar sobre el punto de equilibrio entre la fabricación y la compra, ¿Qué decisión habrá que tomarse en ese caso?

PLANTEAMIENTO

Sea X la variable demanda anual de impresoras, tienen una distribución normal con media 3000 y desviación estándar 700

Las unidades que se necesitan producir o comprar, están en función de la demanda 1.15 X

La decisión de producir o comprar debe tomarse con el objetivo de minimizar los costos, sea A el número de cabezas compradas o fabricadas, los costos asociados son

Si se compran 35 A, si se fabrican 24 A + 28000

SOLUCION

Los costos de las dos alternativas son iguales cuando A = 2546 unidades
35 A = 24 A + 28000
11 A = 28000
A = 2545.45

La demanda de Cabezas de impresión X = 2546/1.15= 2213.43
Si la demanda es mayor que 2213 es mejor producir que comprar.
La probabilidad de que la demanda justifique producir es igual a la probabilidad que la demanda sea mayor que 2213
$P(X \geq 2213) = P(Z \geq -1.124) = 0.8686$

Si la política de la compañía es fabricar solo cuando hay una probabilidad mayor de 60% de que la demanda se encuentre a 1.5 desviaciones sobre el punto de equilibrio entre la fabricación y la compra, 2213, esto es la demanda es mayor a 2213 +1.5 *700 = 3263

La probabilidad de que la demanda sea mayor a 3263 es igual a la probabilidad de que la variable Z sea mayor 0.375,
$P(Z \geq 0.375) = 0.355$ por lo tanto deben comprarse los módulos.

30. Una compañía presta servicios de jardinería a los dueños de casas y a las empresas pequeñas. Está planeando comprar un nuevo distribuidor

defertilizantes que cuesta $43.50. Se estima que con él ahorrará 8 minutosde trabajo por cada hora de uso. El especialista en el cuidado del césped estima que la vida esperada del distribuidor es apenas 48 horas debido a la corrosión y que las probabilidades son de 7 a 5 de la que su vida oscile entre 42 y 54 horas siguiendo una distribución normal. Si la compañía paga a sus jardineros $12.50 por hora ¿Cuál es la probabilidad de que el distribuidor se pague con su trabajo antes de deteriorarse?

PLANTEAMIENTO

Costo del distribuidor $43.50
Pago al personal $12.50 por hora
Ahorro 8 minutos por hora esto es$1.667 por hora

El distribuidor se paga si trabaja 26.09 horas

SOLUCION

La vida del distribuidor es una Variable Aleatoria con media 48 horas
La probabilidad de que la vida oscile entre 42 y 54 horas es 7/12, entonces ,si se supone que la distribución es normal, la probabilidad de que la vida oscile entre 42 y 48 horas es 0.2916
$P(42 \leq X \leq 48) = 0.2916$
El valor Normal estándar para esta área es Z = 0.81
Por lo que la desviación estándar es 7.4
La probabilidad de que el distribuidor se pague con su trabajo antes de deteriorarse es
$P(X \geq 26.09) = P(Z \geq -2.96) = 0.9985$

31. Los eslabones usados en la fabricación de cadenas están normalmente distribuidos con respecto a su resistencia media de 1000 kg. Y desviación

estándrar de 50 kg. . Cada cadena es fabricada empleando 20 eslabones. Cuál es la probabilidad que una cadena se rompa soportando un peso de 900 kg.Cuál debe ser la resistencia mínima promedio para que el 99% de las cadenas fabricadas soporten 900 kg sin romperse

PLANTEAMIENTO

La resistencia de los eslabones es una variable aleatoria normal con media 1000 Kg y desviación estándar 50 Kg
Cada cadena se fabrica con 20 eslabones, la cadena se rompe si al menos uno de los eslabones se rompe.
La probabilidad de que se rompa la cadena P(A) es
P(A)= 1-P(ninguno de los eslabones se rompe)

SOLUCION

Para cada eslabón
$P(X \leq 900) = P(Z \leq (900-1000)/50) = P(Z \leq -2)= 0.0228$
$P(X \geq 900) = 1- 0.228 = 0.977$
La probabilidad de que se rompa la cadena es $1- 0.977^{20}$

La resistencia mínima para que el 99% de las cadenas no se rompa R es:

Probabilidad de que no se rompa la cadena = $0.99 = V^{20}$
Donde V es la probabilidad de que un eslabón no se rompa, es decir soporte una resistencia mayor que 900 gr
V =0.99999
La variable Z normal estándar que le corresponde es Z= -3.5

$$-3.5 = (900 -R) / 50$$

De donde R es como mínimo 1075 gr