Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Área de Estadística

VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

Concepto:

Sean X e Y variables aleatorias. Una variable aleatoria bidimensional (X, Y) es una asignación numérica en R^2 :

$$(X, Y): E \rightarrow R^2$$

$$ei \dashrightarrow (X(ei), Y(ei)) \in R^2$$

Tipos

- Variables aleatorias bidimensionales discretas
- Variables aleatorias bidimensionales continuas

Variables aleatorias bidimensionales discretas

Son aquellas variables aleatorias que sólo pueden tomar un número de valores finito o infinito numerable.

$$(X, Y) : E \dashrightarrow N^2 \quad ei \dashrightarrow (X(ei), Y(ei)) \in N^2$$

Las variables aleatorias bidimensionales discretas están caracterizadas por la función de probabilidad conjunta y la función de distribución Además en este caso existen distribuciones marginales de las variables y distribuciones condicionadas.

Función de probabilidad conjunta

Definición

$$\begin{aligned} f : N^2 &\longrightarrow [0, 1] \\ (x_i, y_j) &\longrightarrow f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \\ & \quad\;\; i = 1, \ldots, n \\ & \quad\;\; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Propiedades:

- $0 \leq f(X, Y) = P[(X, Y)] = P(X = x_i, Y = y_j) \leq 1$
- $f(X, Y) = P[(X, Y) \in B] = \sum_{(x_i, y_j)} P(X = x_i, Y = y_j)$
- $\sum_{i=1} n \sum_{j=1}^{m} P[x = x_i, Y = y_j] = 1$

Función de probabilidad marginal

- Marginal de X:

$$P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j]$$

- Marginal de Y:

$$P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} P[X = x_i, Y = y_j]$$

Función de probabilidad condicionada

- De X condicionada por $Y = y_j$:

$$P[X = x / Y = y_j] = \frac{P[X = x, Y = y_j]}{P[Y = y_j]}$$

- De Y condicionada por $X = x_i$:

$$P[Y = y / X = x_i] = \frac{P[X = x_i, Y = y]}{P[X = x_i]}$$

Función de distribución

Sea $(E, P(E), P)$ un espacio de probabilidad, (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y $f(X, Y)$ su función de probabilidad conjunta. Se llama función de distribución (acumulativa) de la variable aleatoria discreta (X, Y), $F_{(X,Y)}(x, y)$:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i, y_j) &\longrightarrow F(x_i, y_j) = P(X \leq x_i, Y \leq y_j) \end{aligned}$$

Variables aleatorias bidimensionales continuas

Sea (X,Y) una variable continúa, se dice que f es su función de densidad conjunta si:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, \mathrm{d}\, v\, \mathrm{d}\, u$$

La función f debe verificar:

1. $f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y)$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\, \mathrm{d}\, v\, \mathrm{d}\, u = 1$

$z = f(x,y)$ Representa una superficie de densidad, de tal forma que el área encerrada

entre la superficie "**Z**" y el plano "**XY**" vale la unidad.

La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores dentro del rectángulo viene dada $(a,b) \times (c,d)$ por:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y)\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, x.$$

Si **"A"** representa cualquier suceso y R_A la región del plano **"XY"** que se corresponde con **"A",** se define su probabilidad como:

$$P(A) = \int_{R_A} f(x,y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$

La función de distribución conjunta viene dada por:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= P(-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, \mathrm{d}\, v\, \mathrm{d}\, u\ . \end{aligned}$$

La relación entre **F** y *f* es:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Las funciones de distribución marginales son:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u \\ F_2(y) &= P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u\,. \end{aligned}$$

Derivando se obtienen las correspondientes funciones de densidad marginales:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,\mathrm{d}\,v \\ f_2(y) &= \frac{\partial F_2(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,\mathrm{d}\,u\,. \end{aligned}$$

Valor Esperado de las Variables aleatorias bidimensionales

Sea una variable aleatoria bidimensional *(X,Y)* cuya *fdp* conjunta es la función de probabilidad conjunta $p(x_i,y_j)$ si es discreta o la función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ si es continua y sea una función real de dos variables $Z = H(x, y)$ de manera que podemos definir una variable aleatoria Z que es función de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) de la forma $Z = H(X, Y)$. Si la *fdp* de Z es $q(z_i)$, si Z es discreta, o q(z) si es continua, entonces la esperanza matemática de Z es, de acuerdo con la definición general:

$$E(Z) = \sum_{x_i \in R_X} z_i . q(z_i) \qquad \text{(para } Z \text{ discreta)}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z q(z) dz \qquad \text{(para } Z \text{ continua)}$$

Teorema

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional y sea Z=H(X,Y) una variable aleatoria que es función de (X,Y).

a) Si Z es variable aleatoria discreta que proviene de la variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y) cuyo recorrido es R_{XY} y su fdp conjunta es $p(x_i,y_j)$, entonces:

$$E(Z) = E[H(X,Y)] = \sum_{(x_i,y_j)\in R_{XY}} H(x_i,y_j)p(x_i,y_j)$$

b) Si Z es variable aleatoria continua que proviene de la variable aleatoria continua bidimensional (X,Y) cuya fdp conjunta es f (x,y), entonces:

$$E(Z) = E[H(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy.$$

Covarianza

Es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias. Es el dato básico para determinar si existe una dependencia entre ambas variables y además es el dato necesario para estimar otros parámetros básicos, como el coeficiente de correlación lineal o la recta de regresión.

Sean X e Y dos variables aleatorias. La covarianza de X e Y se define:

$$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Propiedades de la covarianza:

1- $Cov(a + bX, c + dY) = bdCov(X,Y)$

2- $Cov(X + Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

3- $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i,Y_j)$

4- $Cov(X,X) = V(X)$

Coeficiente de Correlación

En realidad más que la covarianza aquí nos interesa considerar una cantidad relacionada con σ_{XY} y que según veremos nos dará información sobre el grado de asociación que existe entre X e Y. Más concretamente nos contará si existe algún grado de relación lineal entre X e Y. Esa cantidad es el coeficiente de correlación lineal.

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Definimos el ***coeficiente de correlación lineal entre X e Y*** como $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Propiedades del coeficiente de correlación

Propiedad 1

Si X e Y son variables aleatorias independientes entonces $\rho_{XY} = 0$.

Propiedad 2

$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

Propiedad 3

Si $\rho_{XY}^2 = 1$, entonces con probabilidad 1 es $Y = A.X + B$ donde A y B son constantes.

Propiedad 4

Si X e Y son dos variables aleatorias tales que $Y = A.X + B$, donde A y B son constantes, entonces $\rho_{XY}^2 = 1$. Si $A > 0$ es $\rho_{XY} = 1$ y si $A < 0$ es $\rho_{XY} = -1$.

Independencia

Hemos visto que a partir de la distribución conjunta se puede hallar la distribución de cada componente (estas eran las distribuciones marginales). Cabe preguntarse si a partir de las distribuciones marginales es posible determinar la distribución conjunta. En general esto no es cierto, solo en el caso particular que las variables sean independientes. Dadas dos variables X e Y son independientes si y solo si:

a) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Sea $p(x_i, y_j)$ su *fdp* conjunta y $p(x_i)$ y $q(y_j)$ las correspondientes *fdp* marginales de X e Y. Decimos que X e Y son ***variables aleatorias independientes*** si y sólo si

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in R_{XY}$$

b) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Sea $f(x,y)$ su *fdp* conjunta y $g(x)$ y $h(y)$ las correspondientes *fdp* marginales de X e Y. Decimos que X e Y son ***variables aleatorias independientes*** si y sólo si

$$f(x,y) = g(x)h(y) \quad \forall (x,y) \in R^2$$

Propiedades de variables independientes:

- $Si\ X\ e\ Y\ son\ independientes\ entonces\ E[XY] = E[X] \times E[Y],\ es\ decir\ \ Cov[X,Y] = 0$.
- $Si\ X\ e\ Y\ son\ independientes\ entonces\ Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Problemas Resueltos

Variables Aleatorias Bidimensionales Discretas

Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sean las variables aleatorias: X ="número de caras en las tres tiradas" e Y ="diferencia en valor absoluto entre el número de caras y el de escudos en las tres tiradas". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de (X, Y)
b) Media y desviación típica de las distribuciones marginales de X e Y
c) Covarianza y coeficiente de correlación
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Distribución condicionada de X a Y = 3
f) Distribución condicionada de Y a X = 2
g) $P[X \le 1; Y > 0]$, $P[X \ge 2]$, $P[Y < 3]$

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega = \{(c,c,c),(c,c,e),(c,e,c),(e,c,c),(c,e,e),(e,c,e),(e,e,c),(e,e,e)\}$

$X(c,c,c) = 3$ $\qquad$ $Y(c,c,c) = 3$
$X(c,c,e) = X(c,e,c) = X(e,c,c) = 2$ $\qquad$ $Y(c,c,e) = Y(c,e,c) = Y(e,c,c) = 1$
$X(c,e,e) = X(e,c,e) = X(e,e,c) = 1$ $\qquad$ $Y(c,e,e) = Y(e,c,e) = Y(e,e,c) = 1$
$X(e,e,e) = 0$ $\qquad$ $Y(e,e,e) = 3$

Distribución de probabilidad:

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Probabilidades marginales:

$$\sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet} = p_{1\bullet} + p_{2\bullet} + p_{3\bullet} + p_{4\bullet} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j} = p_{\bullet 1} + p_{\bullet 2} = \frac{6}{8} + \frac{2}{8} = 1$$

Adviértase que la probabilidad conjunta:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = \left(0+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{3}{8}+0\right) + \left(\frac{3}{8}+0\right) + \left(0+\frac{1}{8}\right) = 1$$

Siendo: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} p_{ij} = \sum_{i=1}^{4} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{2} p_{\bullet j} = 1$. En general, $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{m} p_{\bullet j} = 1}$

b) Distribución marginal de la variable aleatoria X:

x_i	$p_{i\bullet}$	$x_i \cdot p_{i\bullet}$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_{i\bullet}$
0	1/8	0	0	0
1	3/8	3/8	1	3/8
2	3/8	6/8	4	12/8
3	1/8	3/8	9	9/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_X = E(X) = \alpha_{10} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_{i\bullet} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \alpha_{20} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot p_{i\bullet} = 3$

$\sigma_X^2 = Var(X) = \mu_{20} = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_x = \sqrt{0,75} = 0,866$

- Distribución marginal de la variable aleatoria Y:

y_j	$p_{\bullet j}$	$y_j \cdot p_{\bullet j}$	y_j^2	$y_j^2 \cdot p_{\bullet j}$
1	6/8	6/8	1	6/8
3	2/8	6/8	9	18/8
	1	12/8		3

Media: $\mu_Y = E(Y) = \alpha_{01} = \sum_{j=1}^{2} y_j \cdot p_{\bullet j} = \frac{12}{8} = 1,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$E(Y^2) = \alpha_{02} = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \cdot p_{\bullet j} = 3$

$\sigma_Y^2 = Var(Y) = \mu_{02} = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3 - 1,5^2 = 0,75 \quad \mapsto \quad \sigma_Y = \sqrt{0,75} = 0,866$

c) Covarianza y coeficiente de correlación

- La covarianza se define: $\mu_{11} = \mu_{XY} = \sigma_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01}$

donde $\alpha_{11} = E(XY) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij}$

Así pues,

$$\alpha_{11} = \left(0.1.0 + 0.3.\frac{1}{8}\right) + \left(1.1.\frac{3}{8} + 1.3.0\right) + \left(2.1.\frac{3}{8} + 2.3.0\right) + \left(3.1.0 + 3.3.\frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8} = 2,25$$

con lo cual, $\mu_{XY} = Cov(X,Y) = \alpha_{11} - \alpha_{10} \cdot \alpha_{01} = 2,25 - 1,5 \cdot 1,5 = 0$

Señalar que la covarianza $\mu_{XY} = Cov(X,Y)$ puede ser negativa, nula o positiva, siendo una medida de la fuerza de la relación lineal entre X e Y.

- El coeficiente de correlación lineal ρ_{XY} es un número abstracto (sin unidades) que determina el grado en que las variables (X, Y) están relacionadas linealmente.

Se define: $\boxed{\rho_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}}$

con lo cual, $\rho_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_x . \sigma_Y} = \dfrac{0}{\sqrt{0,75}.\sqrt{0,75}} = 0$

Denotar que $-1 \le \rho_{XY} \le 1$. Cuando $\rho_{XY} = 0$ no existe relación lineal entre las variables X e Y, diciendo que están incorreladas.

d) Para que X e Y sean independientes se tiene que verificar: $p_{ij} = p_{i\bullet} . p_{\bullet j} \quad \forall (x_i, y_j)$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	$p_{11} = 0$	1/8	$p_{1\bullet} = 1/8$
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1} = 6/8$	2/8	1

$p_{11} = 0 \neq \dfrac{1}{8}.\dfrac{6}{8} = p_{1\bullet}.p_{\bullet 1}$

Las variables X e Y NO son independientes

Señalar que cuando dos variables X e Y son independientes, es decir, cuando $p_{ij} = p_{i\bullet} . p_{\bullet j} \ \forall (x_i, y_j)$, la covarianza es cero. El caso contrario no se verifica. Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{X e Y independientes} \Rightarrow \mu_{11} = \mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \\ \mu_{11} = \mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \not\Rightarrow \text{X e Y independientes} \end{array}}$$

e) Distribución condicionada de X a $Y = 3$: $P[X / Y = 3] = \dfrac{P[X \cap (Y = 3)]}{P(Y = 3)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	3/8
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	$\boxed{2/8}$	1

X	P(X / Y = 3)
0	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
1	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
2	$\dfrac{0}{2/8} = 0$
3	$\dfrac{1/8}{2/8} = \dfrac{1}{2}$
	1

En general, $\boxed{P[X / Y = y_j] = \dfrac{P[X \cap (Y = y_j)]}{P(Y = y_j)}}$

f) Distribución condicionada de Y a X = 2: $P[Y/X=2]=\dfrac{P[Y\cap(X=2)]}{P(X=2)}$

X \ Y	1	3	$p_{i\bullet}$
0	0	1/8	1/8
1	3/8	0	3/8
2	3/8	0	$\boxed{3/8}$
3	0	1/8	1/8
$p_{\bullet j}$	6/8	2/8	1

Y	P(Y / X = 2)
1	$\dfrac{3/8}{3/8}=1$
3	$\dfrac{0}{3/8}=0$
	1

En general, $\boxed{P[Y/X=x_i]=\dfrac{P[Y\cap(X=x_i)]}{P(X=x_i)}}$

g) $P[X\le 1;\, Y>0]$, $P[X\ge 2]$, $P[Y<3]$

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

X \ Y	1	3
0	0	1/8
1	3/8	0
2	3/8	0
3	0	1/8

$$P[X\le 1;\, Y>0]=P[X=0\,;\ Y=1]+P[X=0\,;\ Y=3]+P[X=1;\ Y=1]+P[X=1;\ Y=3]=$$
$$=p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=0+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[X\ge 2]=P[X=2\,;\ Y=1]+P[X=2\,;\ Y=3]+P[X=3\,;\ Y=1]+P[X=3\,;\ Y=3]=$$
$$=p_{31}+p_{32}+p_{41}+p_{42}=\frac{3}{8}+0+0+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P[Y<3]=P[X=0\,;\ Y=1]+P[X=1;\ Y=1]+P[X=2\,;\ Y=1]+P[X=3\,;\ Y=1]=$$
$$=p_{11}+p_{21}+p_{31}+p_{41}=0+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+0=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

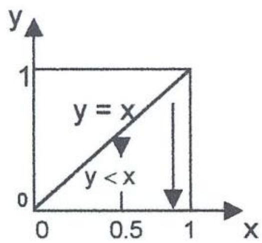
Variables Aleatorias Bidimensionales Continuas

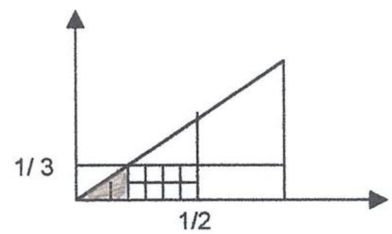
Ejemplo 1:

Si x, y son variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad,

$$f(x,y) = 18x^2y^2 \qquad\qquad 0 \le x \le 1\,;0 \le y \le x$$

Recorrido de xy:





Calcule lo siguiente:

a. Encuentre la probabilidad $P(x < \frac{1}{2}\,, y < \frac{1}{3})$

Solución:

$$P\left(x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{3}\right) = P\left(0 \le x \le \frac{1}{3}, 0 \le y \le x\right) + P\left(\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \frac{1}{3}\right)$$

$$= \int_0^{1/3}\int_0^{x} 18x^2y^2\, dy\, dx + \int_{1/3}^{1/2}\int_0^{1/3} 18x^2y^2\, dy\, dx$$

$$= 0.0013717 + 0.0065157 = \mathbf{0.007887}$$

b. La distribución marginal de x.

Solución:

$$g(x) = \int_0^{x} 18x^2y^2\, dy = \frac{18}{3}\, x^5 \qquad 0 \le x \le 1$$

c. La distribución marginal de y.

Solución:

$$h(y) = \int_y^1 18x^2y^2\, dx = 6y^2(1 - y^3) \qquad 0 \le y \le 1$$

Ejemplo 2:

Se supone que cada neumático delantero de un tipo particular de vehículo está inflado a una presión de 26 lb/pulg2. Suponga que la presión de aire real en cada neumático es una variable aleatoria 'x' para el neumático derecho y 'y' para el izquierdo con función de densidad de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y^2) & 20 \le x \le 30, \quad 20 \le y \le 30 \\ 0 & Cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a. ¿Cuál es el valor de K?

Solución:

Para que la función de probabilidad conjunta sea válida, se sabe que, al integrar a cada variable dentro de sus límites el resultado debe ser 1 (probabilidad total).

$$k\int_{20}^{30}\int_{20}^{30}(x^2+y^2)\,dx\ dy = 1$$

$$k\int_{20}^{30}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{20}^{30} dy = 1\,; \qquad k\int_{20}^{30}\left(\frac{19{,}000}{3}+10y^2\right)dy = 1$$

$$k\left[\frac{19000}{3}*y+10\ \frac{y^3}{3}\right]_{20}^{30} = 1; \qquad k\left(\frac{2*19000}{3}\right) = 1\,; \qquad \boldsymbol{k = \frac{3}{38000}};$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos neumáticos estén inflados a menos presión?

Solución:

Inflados a menos presión indicaría por tanto que ambos neumáticos pueden tener menos de 26 lb/pulg^2.

$$P(x<26, y<26) = \int_{20}^{26}\int_{20}^{26}k(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0.3024$$

Existe una probabilidad de 0.3024 de que ambos neumáticos tengan estén inflados a menos presión.

c. *Marginal de y*: Determine la función marginal del neumático izquierdo.

Solución:

$$f_y(y) = \int_{20}^{30} k(x^2 + y^2)dx \ = k\left[\frac{x^3}{3} + xy^2\right]_{20}^{30}$$

$$k\ (6y^2 + 9576)\ \ 20 \leq y \leq 30$$

d. *Marginal de x*: Determine la función marginal del neumático derecho.

Solución:

$$f_x(x) = \int_{20}^{30} k(x^2 + y^2)dy \ = k\left[\frac{y^3}{3} + yx^2\right]_{20}^{30}$$

$$k\ (6x^2 + 9576)\ \ 20 \leq x \leq 30$$

e. *Independencia*: ¿Son ‘x’ y ‘y’ variables independientes?

Solución:

Si ‘x’ y ‘y’ son variables independientes, entonces su función conjunta *f(x,y)* debe ser igual al producto de sus funciones marginales $f_x(x)*f_y(y)$.

$$f_x(x) * f_y(y) = \ 36k^2(1596 + x^2)(1596 + y^2)\ \neq k(x^2 + y^2)$$

Debido a que no es cierto que el producto de ambas marginales provea la función conjunta de ‘x’ y de ‘y’, se concluye que ‘x’ y ‘y’ no son independientes.

f. *Condicional:* Si el neumático derecho tiene una presión de 26 lb/pulg2, determine la probabilidad de que el neumático izquierdo tenga menos presión que la que presenta el derecho.

Solución:

$$P\left(y < 26/_{x = 26}\right) = \int_{20}^{26} \frac{f(x,y)}{f_x(x)} dy, \ \ donde: x = 26$$

$$\int_{20}^{26} \frac{k\,(x^2+y^2)}{k\,(6x^2+9576)} dy \ = \ \int_{20}^{26} \frac{26^2+y^2}{6*26^2+9576}\ dy = \left(\frac{1}{13632}\right)\int_{20}^{26} (26^2+y^2)\ dy$$

$$\left(\frac{1}{13632}\right)\left[26^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{20}^{26} = \left(\frac{1}{13632}\right)\left(\frac{9576}{3} - 4056\right) = 0.5317$$

Existe una probabilidad de 0.5317 de que el neumático izquierdo tenga una presión menor a la que presenta el neumático derecho.

Ejemplo 3:

La función de densidad de probabilidad conjunta de la cantidad X de almendras y la cantidad Y de nueces de Acajú en una lata de 1 lb de nueces es:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24\,xy & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y \le 1 \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

Si 1 lb de almendras le cuesta a la compañía Q1.00, 1 lb de nuez de Acajú le cuesta Q1.5 y 1 lb de manías le cuesta Q0.5, entonces el costo total del contenido de una lata es

$$h(X,Y) = (1)X + (1.5)Y + (0.5)(1-x-y) \ \ = \ \ \mathbf{0.5 + 0.5X + Y}$$

(Puesto que 1-X-Y del peso se compone de manías). El costo esperado total es:

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) * f(x,y)\ \ dx\, dy$$

$$E[h(X,Y)] = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} (0.5 + 0.5x + y) * 24xy\ \ dy\, dx$$

$$E[h(X,Y)] = \boldsymbol{Q1.10}$$

Si se tiene una función marginal de X=Cantidad de almendras y Y=cantidad de nueces igual a:

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}$$

Con $f_Y(y)$ obtenida reemplazando “x” por “y” en $f_X(x)$. Es fácil verificar que $\mu_X = \mu_Y = \frac{2}{5}y$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^{1-x} xy * 24xy\, dy\, dx$$

$$E(XY) = 8\int_0^1 x^2(1-x)^3\, dx = \mathbf{\frac{2}{15}}$$

Por lo tanto la Covarianza está dada por:

$$Cov(X,Y) = \frac{2}{15} - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\mathbf{\frac{2}{75}}$$