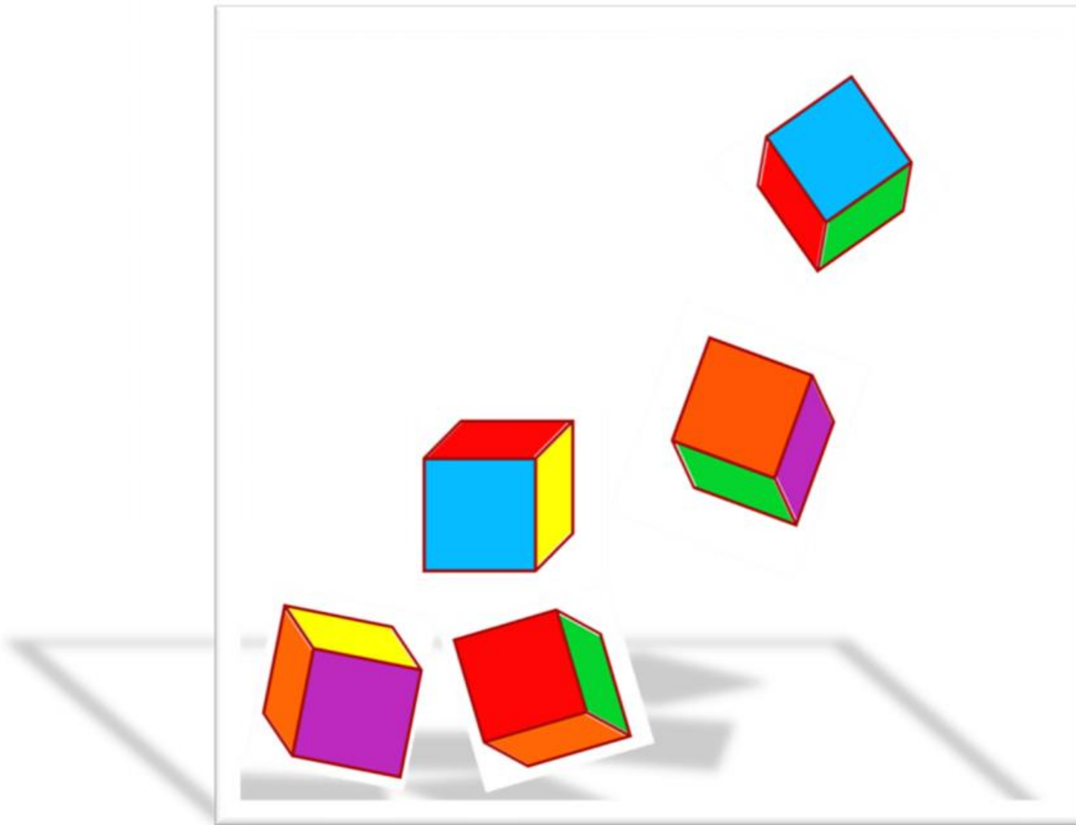
TEORÍA BÁSICA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS



PROBABILIDAD

MARTHA GUISELA GAITÁN GARAVITO

CUARTA EDICIÓN

TEORÍA BASICA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

PROBABILIDAD

CUARTA EDICIÓN

MARTHA GUISELA GAITÁN GARAVITO
INGENIERA INDUSTRIAL

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

GUATEMALA, 2015

PROBABILIDAD

CUARTA EDICIÓN

Contenido

PREFACIO

Las definiciones de la Estadística la presentan como un instrumento del Método Científico y por tanto orientado al estudio y a la investigación, actividades que surgen ante la necesidad de determinar leyes que rijan y permitan explicar fenómenos y aumentar el conocimiento del ser humano; es en la investigación, cuando se presentan situaciones complejas afectadas por la incertidumbre medible, donde la Estadística encuentra su principal campo de acción.

Estadística es un método general, un lenguaje común, referido a conjuntos y sus relaciones, sirve para obtener conclusiones probables de poblaciones imperfectamente conocidas. Este sentido genérico unido a la preocupación por formalizar la validez de los resultados es el que sitúa a la Estadística en la intersección del resto de las ciencias y le da el carácter de instrumento del Método Científico.

Un punto central es caracterizar a la Estadística como una ciencia que busca establecer los límites de la incertidumbre y utiliza como instrumento de trabajo las matemáticas y el cálculo de probabilidades para estudiar y predecir el comportamiento de aquellos fenómenos que dependen del azar. La estadística puede considerarse como el arte de la decisión en presencia de incertidumbre.

Tomar una decisión es elegir una opción viable, implica el análisis profundo del entorno en que ésta se tomará, así como las consecuencias que puedan acompañarla; es imprescindible para ello la recolección e interpretación adecuada de toda la información relacionada con el contexto de problema y las diferentes opciones de solución, la que incluye el conocimiento preciso de los factores de riesgo.

Para precisar los factores de riesgo es necesario que sean medidos y ponderados de acuerdo con un objetivo previamente establecido; y es en este aspecto en el que la Teoría de Probabilidades fundamenta a la Estadística.

Los profesionales de la ingeniería que suelen desempeñarse en diversos campos tales como: agricultura, salud, comercio, economía, finanzas, telecomunicaciones, industria, turismo, sicología y otros, no importando cual sea su actividad, se enfrenta en su quehacer diario a la toma de decisiones; la habilidad que muestre para manejar el proceso de decisión es una de las características fundamentales que lo debe distinguir, lo acertado de esas decisiones y los beneficios que de ellas se obtengan repercuten en el éxito tanto personal como de las organizaciones y sectores económicos en los que labora.

Este proceso de decisión fundamentalmente requiere realizar tareas relacionados con el manejo de información para el problema en estudio, con el objetivo de generar resultados pertinentes para la toma de decisiones. En su desarrollo, el ingeniero observa fenómenos, registra y analiza datos a través de observaciones y con ellos realiza interpretaciones de lo que puede pasar, es decir, el profesional se enfrenta a la incertidumbre de observar fenómenos que están en movimiento sujetos a la variabilidad y la observación que puede hacerse de ellos es limitada, por eso es necesario el conocimiento de la Teoría de Probabilidades y de la Estadística.

Además, el profesional se enfrenta a problemas asociados al tratamiento de cantidades masivas de información para encontrar y describir y relacionar las variables de interés cuyo análisis puede conducir a resolver el problema, lo que le significará que debe conocer y manejar las herramientas teóricas y prácticas que le permitan discriminar entre "señales" y "ruido", y construir los modelos que representen adecuadamente estas variables en los procesos productivos, sociales y económicos objeto de estudio y le sean útiles para analizar y evaluar alternativas de acción. Nuevamente la Estadística y la Teoría de Probabilidades le proporcionan los métodos y técnicas fundamentales para este análisis.

Reconociendo lo esencial que es el manejo de la incertidumbre y el riesgo en el proceso de toma de decisiones, este libro presenta una introducción al estudio de la Probabilidad, resume la base teórica y relaciona al lector con la terminología, conceptos, métodos y modelos útiles para describir, medir y analizar los factores de riesgo; ha sido estructurado con el propósito de apoyar el aprendizaje de la Teoría Probabilidad y guiar el desarrollo de un curso básico en el que se hace énfasis en la aplicación de conceptos y la utilidad del análisis probabilístico en la evaluación de alternativas.

En el primer capítulo, Invitación al Estudio de Probabilidad, se ilustra, a través de casos tomados de la vida diaria, el manejo intuitivo de la probabilidad que las personas aplican ante situaciones de incertidumbre para afrontar la inseguridad y el riesgo. En el segundo capítulo, Conceptos Básicos de Probabilidad, se hace énfasis en las definiciones relacionadas con la materia y los métodos elementales para calcular probabilidades. En el capítulo tres, Variables Aleatorias, se presenta la metodología para describir esta clase de variables y los procesos para el cálculo de probabilidades de eventos relacionados con las mismas. Finalmente, en los capítulos cuatro y cinco, Distribuciones de Probabilidad Discretas y Continuas, respectivamente, se presentan lo modelos matemáticos más utilizados en la descripción de variables aleatorias.

Considerando las sugerencias de los profesores que utilizan el material para desarrollar la temática de sus cursos y la necesidad de ejercitar los conceptos estudiados se presentan continuamente ejercicios de seguimiento y auto evaluación del aprendizaje, además se incluyen en cada uno de los cuatro últimos capítulos una colección de problemas resueltos y un número de problemas propuestos con sus respectivas respuestas que ofrecen opciones para la evaluación final de del aprendizaje de la temática

Haciendo uso de las herramientas computacionales al alcance del lector se adiciona el apéndice "Solución de problemas con ayuda de las funciones de Excel" que ilustra las aplicaciones de cada una de las funciones estadísticas que tiene esta hoja electrónica y se relacionan con el cálculo de las distribuciones de probabilidad.

Deseo sinceramente que usted, amable lector, obtenga de este conocimiento el mayor provecho.

Martha Guisela Gaitán Garavito

Guatemala, 2015

CAPÍTULO 1

INVITACIÓN AL ESTUDIO DE LA PROBABILIDAD

En este capítulo se desarrolla una serie de ejemplos tomados de la vida cotidiana de un ciudadano común; el propósito de presentarlos es ayudar al lector en la comprensión intuitiva del concepto de probabilidad y su aplicación en la solución de problemas en los que se presentan: incertidumbre, inseguridad y riesgos; al mismo tiempo muestran que en las decisiones que se toman día a día están implícitos los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidad.

El lector, seguramente* ha tenido oportunidad de participar en juegos de azar: bingo, lotería, naipes, etc. que ilustran como, antes de conocer el resultado, se presentan situaciones claras de incertidumbre, ya que el resultado no depende de la habilidad del jugador, sino de la casualidad, del acaso. Sin embargo, se juega porque se considera que se tiene la oportunidad de ganar, es posible ganar, ¡existe la probabilidad de ganar!

La probabilidad intuitiva de un evento es el grado de creencia o confianza que determinado individuo coloca en la ocurrencia de dicho evento, basándose para ello en la evidencia de que dispone. Sin embargo en la solución de problemas, bajo riesgos o incertidumbre no basta determinar que existe una probabilidad de ocurrencia de un evento, es fundamental interpretarla y utilizar esa información para tomar decisiones que lleven a la consecución de un objetivo, que puede ser ganar el juego o en última instancia minimizar las pérdidas.

Existen variedad de problemas en que se presenta la necesidad de prever riesgos y en el afán de minimizarlos se analiza la probabilidad de ocurrencia de los hechos que implican esos riesgos. En seguida algunos casos.

No puedo llegar tarde

* Este supuesto se fundamenta en la probabilidad que existe de que cada persona haya participado al menos una vez en un juego de este tipo.

Hace sesenta y cinco días usted empezó a trabajar en una compañía de prestigio como asistente de la Gerencia de Mercadeo, ha colaborado intensamente para elaborar un plan de comercialización para un producto líder y se le ha convocado a una reunión con el Consejo Directivo el día de mañana a las 8:00 horas para la presentación del plan. Su exposición está preparada, espera demostrar su capacidad y consolidarse en la compañía. Particularmente ese día necesita estar puntualmente en la oficina, no le está permitido hacerse esperar.
¿Cómo puede minimizar el riesgo de llegar después de la hora señalada?
¿Existe la posibilidad de que ocurra un imprevisto en el camino, un atraso en el tránsito?
Quizás son sucesos poco probables, pero, saldrá más temprano de su casa.
¿Qué tan temprano saldrá?

De acuerdo con su experiencia (65 días) supone que en el trayecto es poco probable que tome más de 30 minutos, nunca le ha ocurrido, siempre sale de casa a las 7:30 horas y llega justo con su horario de trabajo.

Mañana saldrá a las 7:20 horas; esa es su decisión para minimizar sus riesgos, para minimizar la probabilidad de llegar después de las 8:00 horas.

Viaje de vacaciones

Suponga que organiza un viaje de vacaciones recorriendo las ciudades de Viena, París, Roma, Madrid, etc.

La forma más práctica y segura es que acuda a una agencia de viajes y escoja un paquete vacacional que presente la mejor alternativa. Si este paquete en el rubro de las comidas no incluye el almuerzo, ¿qué aspectos tomará en cuenta para presupuestar sus gastos de almuerzo? Necesita información sobre el precio promedio de algunas comidas, ¿no es así?, pues supone que el precio no es el mismo en todos los lugares, los precios varían.

Los precios pueden variar de una ciudad a otra, pero el precio esperado y una medida de variabilidad de los mismos le serán útiles para planear su presupuesto y tomar otras decisiones con respecto a su viaje.

El seguro médico

Si necesita minimizar los riesgos de quedarse sin dinero en su viaje de vacaciones, considera la alternativa de comprar un seguro contra accidentes o enfermedad, algunos paquetes vacacionales ya los incluyen, esto es porque, aunque mínima, existe la probabilidad de que un accidente ocurra.

Al tomar la decisión de adquirir un seguro médico, o de otro tipo, se está considerando la probabilidad de que ocurran algunos hechos de riesgo.

Si usted tiene un seguro, ¿por qué lo adquirió? Al razonar su respuesta, ¿emitió un juicio basado en probabilidades?

Los problemas profesionales no distan de los particulares en presentar incertidumbre y riesgo, quizás en los primeros una decisión equivocada presente mayores complicaciones, por lo que considerar la probabilidad de eventos de riesgo y actuar para minimizar sus consecuencias es sumamente importante.
En seguida otros casos de aplicación.

Modelos de inventarios

Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes o mercancías con el propósito de satisfacer una demanda sobre un horizonte de tiempo especificado, la mayoría de empresas deben almacenar bienes para asegurar un trabajo uniforme y eficiente en sus operaciones.

Las decisiones de cuando hacer pedidos y en qué cantidad, son típicas de cada problema.

Dado que la demanda es variable (X), y posiblemente no está completamente determinada, algunas veces se considera mantener un nivel de seguridad (número de piezas en inventario) para asegurarse que estas no falten y por lo tanto no se presente insatisfacción en la demanda.

Conociendo las posibles variaciones de la demanda, la distribución de probabilidades de la demanda, el tamaño de este nivel se determina de modo que la probabilidad de quedarse sin artículos durante el periodo anterior a la llegada de un pedido, no exceda un valor especificado, tendiendo a cero, ya que, al no surtir la demanda, la insatisfacción de los clientes implican pérdidas para la empresa.

Muestreo de trabajo

La teoría de muestreo de trabajo se basa en las leyes fundamentales de la probabilidad. Un problema de este tipo consiste en determinar el tiempo que se espera que un equipo esté inactivo durante una jornada de trabajo, y calcular de esta forma, el tiempo efectivo de trabajo del equipo. Para ello se debe contar con información sobre la probabilidad que ocurran los eventos: el equipo se encuentra trabajando (E) y el equipo se encuentra inactivo (F). Si la probabilidad de E es “p” se infiere que el equipo se encuentra trabajando el p% del tiempo o jornada de trabajo, y que el equipo se encuentra inactivo el (1-p)% de este tiempo, lo que implica un desperdicio de la capacidad instalada.

Algunas aplicaciones profesionales no son específicas en su planteamiento, como los casos anteriores, por ejemplo, en el desarrollo de proyectos, hay tantas decisiones de riesgo que es difícil señalarlas en su totalidad.

Iniciando un negocio

Jacinto Ruiz está interesado en instalar una cafetería en un local cercano a la universidad, tiene una cantidad de dinero ahorrada que invertirá en la iniciación y el equipamiento del negocio, su deseo es planificar y organizar su cafetería minimizando el riesgo de fracasar y perder el dinero invertido.

Al planear el negocio, Jacinto necesita tomar decisiones que parecieran fáciles pero no lo son, preguntas como las siguientes son comunes en problemas como este.

1. ¿Qué clase de alimentos venderá?

Por supuesto que los que considere que tienen una demanda mayor, los que el consumidor solicita con más frecuencia. Las demandas no son conocidas con certeza, pero se puede estimar la probabilidad de que una persona solicite una gaseosa, un refresco u otro producto específico, por lo que se considerará necesario incluirlas en el menú si es muy probable que sean requeridos. Un análisis basado en la teoría de probabilidad debe hacer Jacinto para cada producto que ofrecerá al público.

2. ¿Qué cantidad de cada producto, por unidad de tiempo, tendrá en el local?

Este es un problema de inventarios, debe decidir cuantas unidades de cada producto debe comprar o elaborar a fin de satisfacer a la probable clientela, minimizando el riesgo de faltantes o excedentes.

Las demandas, como se anotó anteriormente, son variables aleatorias[*], no se conocen con certeza, pero es posible asignarles valores entre ciertos rangos y construir una distribución de probabilidades , por ejemplo , es muy probable que se consuman al día menos de 4 cajas de gaseosas, por lo tanto es necesario almacenar no más de cuatro cajas.

[*] Aleatorio, del latín aleatorius, que depende de un suceso fortuito. Relativo al azar.

3. ¿Qué ingreso por las ventas espera en un día? Así determinará si al descontar sus gastos de alquiler del local, energía, empleados, costos de materiales y otros, obtiene un rendimiento adecuado a su inversión y a su trabajo.

Responder esta pregunta implica analizar el comportamiento de variables como: número de clientes que llegan por día, valor, en quetzales, del consumo por cliente, costo mensual de energía, etc. que tampoco toman valores completamente determinados, son variables aleatorias, su valor está influenciado por la casualidad, por factores que Jacinto no puede controlar completamente, por lo que sus decisiones se basan en valores esperados o en valores más probables.

Negociación internacional

En una relación de negocios de cualquier índole están presentes diferentes riesgos que las empresas participantes evalúan para determinar que tan conveniente es la transacción.

La compañía ENERGIASA está considerando la alternativa de invertir en la compra de una empresa que tiene como actividad la comercialización de Energía Eléctrica. Antes de ofertar para la compra, debe realizar algunos estudios que representan costos.

Un análisis profundo de los beneficios que le traerá la inversión implica la búsqueda de toda la información relacionada con la empresa, el país en donde se encuentra, los mercados potenciales: locales, nacionales o regionales del producto o servicio, etc.

A continuación se presentan algunas consideraciones elementales:

A. Suponiendo que ENERGIASA tiene una cantidad determinada de dólares para explorar nuevas oportunidades de inversión y que existen varias empresas a la venta. ¿Qué empresas son más atractivas para iniciar un proceso de negociación? ¿Qué cantidad de dinero está ENERGIASA dispuesta a invertir para investigar y obtener información de las condiciones económicas a nivel micro y macro en las que se desarrolla el negocio y se desarrollará a un largo plazo? ENERGIASA debe considerar el riesgo de invertir para darse cuenta de que no es una negociación conveniente o por lo contrario, tiene una posibilidad de convertirse en un negocio rentable. La decisión de invertir para explorar las oportunidades de éxito se basan en qué tan probable es que se llegue a concretar una negociación con una rentabilidad atractiva a largo plazo.

B. Si al concluir el estudio preliminar decide participar como ofertante en una subasta, debe analizar los términos contractuales de tal forma que las garantías ofrecidas por el vendedor estén completamente claras y los riesgos minimizados. En relación con las condiciones económicas, políticas y sociales del país donde se hace la negociación, ¿existe la probabilidad de que cambien? ¿Qué efecto tienen los posibles cambios en el negocio? ¿Qué cambios se esperan?. El conocimiento de los riesgos que implica un cambio en la situación económica, política o social exige que las condiciones contractuales ofrezcan protección y minimicen el efecto negativo si éste existe.

C. Al realizar un avalúo de los activos de la empresa que está en venta, es necesario determinar la confiabilidad de funcionamiento, la vida útil probable, señalar las posibilidades de falla en un plazo señalado, o la posibilidad de problemas en el suministro de insumos, que al presentarse no permitirían el funcionamiento adecuado del equipo y por lo tanto, tampoco se podría satisfacer la demanda del servicio y la empresa se vería afectada en sus ingresos.

D. Al tener recolectada y analizada toda la información relacionada con la compra y al decidir hacer una oferta, es necesario cuidar de no sobre estimar el valor de la empresa, ya que se está participando en una subasta, donde todos los oferentes desean que se les adjudique la compra pero sin sobrepasar excesivamente el valor de las otras ofertas. ¿Qué estrategia de oferta se elaborará para maximizar la probabilidad de que el negocio se realice ofreciendo la rentabilidad atractiva?..........

Al concluir este capítulo es necesario enfatizar que el análisis de la probabilidad de un evento está ligado a la toma de decisiones y por lo tanto presente en el desarrollo de cualquier actividad, sin embargo la aplicación del concepto intuitivo implica, además de considerar que existe la probabilidad de que ocurra un hecho, tener una medida de la misma, que permita determinar si es frecuente o es remoto que ocurra, es necesario asignarle un número que indique que tan probable es el hecho, el estudio de la Teoría de Probabilidad da el fundamento matemático para hacerlo.

Finalmente es importante apuntar que los criterios de decisión, por ejemplo, la probabilidad de que un suceso ocurra, no tienen la misma relevancia para todas las personas, algunas asumen riesgos grandes, otras son conservadoras y prefieren no arriesgarse, la decisión es de cada persona.

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

HAY QUE CAPTURAR AL LADRÓN

La Sociedad Prisma tiene un supermercado en la colonia El Valle, y por su seguridad se diseñó un sistema de vigilancia para identificar a los ladrones que tienen allí su centro de operaciones. El supermercado está dividido en dos zonas A y B, la primera, en vista de que los artículos que se venden son de gran demanda, está siempre ocupada por una clientela numerosa, en tanto que en la segunda la clientela es menos densa. La dirección dispone de dos policías no uniformados que rondan en las zonas A y B, por otra parte se han instalado cámaras de televisión que permite vigilar las zonas a partir de un local C en donde se encuentran las pantallas. Así los policías pueden encontrase en A, en B o en C en tanto que los ladrones, se supone, solo pueden encontrase en A o en B.

De acuerdo a los registros sobre seguridad, que se han llevado cuando se han detectado robos, los policías han podido establecer probabilidades para descubrir y capturar al ladrón. Considerando, gracias a su experiencia, que si un ladrón se encuentra en A, y un policía en C la probabilidad de capturarlo es 0.3; si el policía se encuentra en A la probabilidad de capturarlo es 0.4 y así para todas las posiciones posibles del policía y del ladrón. Esto datos se muestran en seguida:

PROBABILIDADES DE CAPTURA

Posición del Policía	Posición del Ladrón

	A	B
C	0.3	0.5
A	0.4	0.2
B	0.1	0.7

Pero si los dos policías se encuentran en A (AA), en B (BB) o en C (CC), bajo los supuestos que cada policía actúa de forma independiente y ambos posee la misma capacidad y habilidad por lo que tienen la misma probabilidad de capturar al ladrón, las probabilidades totales de capturar al ladrón se calculan aplicando el principio de probabilidades: La probabilidad de capturar al ladrón es igual a la probabilidad de que lo capture uno u otro policía.

Así, si el ladrón esta en A y los policías en C la probabilidad de que lo capturen es:

P (CC) = P(C) + P(C) - P(C) * P(C),

P (CC) = 0.3 +0.3 - 0.3 * 0.3 = 0.51

Las asignaciones para las 12 posiciones posibles se muestran a continuación.

Posición de los policías	Posición del ladrón		Estrategia de policías
			Frecuencias
	A	**B**	
CC	0.51	0.75	X_1
AA	0.64	0.36	X_2
BB	0.19	0.91	X_3
CA	0.58	0.60	X_4
CB	0.37	0.85	X_5
AB	0.46	0.76	X_6
Estrategia del ladrón			
Frecuencias	Y_1	Y_2	

El problema que se presenta, es seleccionar la mejor "estrategia" para capturar al ladrón, llamando estrategia a un conjunto de frecuencias Xi, i=1, 2, 3,4, 5, 6, positivas y cuya suma es igual a 1, que representan la proporción del tiempo que hay que asignar a la vigilancia en las combinaciones CC, AA, BB, CA, CB, AB.

La determinación de esta estrategia, representa una aplicación de la Teoría de Juegos* que se ilustra a continuación para resaltar la importancia del estudio de la teoría de Probabilidades.

Se pueden considerar infinidad de estrategias. Suponga que se adopta la estrategia siguiente: El 25 % del tiempo los policías están en AA, el 20 % en BB, el 15 % en CB y el 40 % en AB, esto es: $X_1 = 0.00$, $X_2 = 0.25$, $X_3 = 0.20$, $X_4 = 0.0$, $X_5 = 0.15$, $X_6 = 0.40$

Entonces si un ladrón está en A la probabilidad de captura es:

La probabilidad de que los policías estén en AA y capturen al ladrón, o en BB y capturen al ladrón, o en CB y capturen al ladrón, o en AB y capturen al ladrón.

Aplicando el Teorema de Probabilidad Total, esta es igual a :

P (AA) * P (captura / AA) + P(BB) * P(captura / BB) + P(CB) * P(captura /CB) + P(AB) * P(captura/AB)

P (captura) = 0.64*0.25 + 0.19*0.20 + 0.37* 0.15 + 0.40*0.46=0.4375

Con el mismo planteamiento, si el ladrón esta en B, la probabilidad de la captura es:

P (captura) = 0.36*0.25 + 0.91*0.20 + 0.85*0.15 + 0.70* 0.4 = 0.7037

De igual forma, y bajo el supuesto que actúa un ladrón a la vez, el ladrón tiene que decidir una estrategia Yi, i= 1,2, dos frecuencias positivas cuya suma es 1, que representan la proporción de sus visitas en las zonas A o B.

Es evidente que las estrategias deben permanecer secretas para ambos grupos antagónicos y es conveniente que las decisiones sucesivas de unos y los otros sean aleatorias, si no fuera así, que suerte la del ladrón si hubiera descubierto la secuencia de los desplazamientos de los policías o que mala suerte si los policías descubrieran la manera de actuar de él.

Suponga que los policías buscan la estrategia de tal forma que puedan estar seguros de obtener cuando menos una probabilidad g de capturar al ladrón cualquiera que sea su comportamiento. Los ladrones buscan su estrategia de tal forma que tenga cuando más una probabilidad g de ser capturados cualquiera que sea la forma de

* La teoría de Juegos es una teoría matemática que estudia las características generales de los problemas de decisión en los que dos oponentes inteligentes tienen objetivos en conflicto.

actuar de los policías. Estableciendo así un equilibrio entre individuos: policías y ladrones.

Es fácil comprobar que esas frecuencias y el límite g común deben satisfacer las relaciones siguientes:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 1$

$0.51 X_1 + 0.64X_2 + 0.19X_3 + 0.58X_4 + 0.37 X_5 + 0.46X_6 \geq g$

$0.75 X_1 + 0.36 X_2 + 0.91 X_3 + 0.6 X_4 + 0.85 X_5 + 0.76X_6 \geq g$

$Y_1 + Y_2 = 1$

$0.51 Y_1 + 0.75 Y_2 \leq g$

$0.64 Y_1 + 0.36 Y_2 \leq g$

$0.19 Y_1 + 0.91 Y_2 \leq g$

$0.58 Y_1 + 0.6 Y_2 \leq g$

$0.37 Y_1 + 0.85 Y_2 \leq g$

$0.46 Y_1 + 0.76 Y_2 \leq g$

Las variables están todas comprendidas entre 0 y 1 incluyendo los límites

Resolviendo las ecuaciones y desigualdades del ladrón, sustituyendo $Y_2 = 1 - Y_1$ y considerando todas las desigualdades como ecuaciones, se obtiene:

$0.75 - 0.24 Y_1 = g$ (1)

$0.36 + 0.28Y_1 = g$ (2)

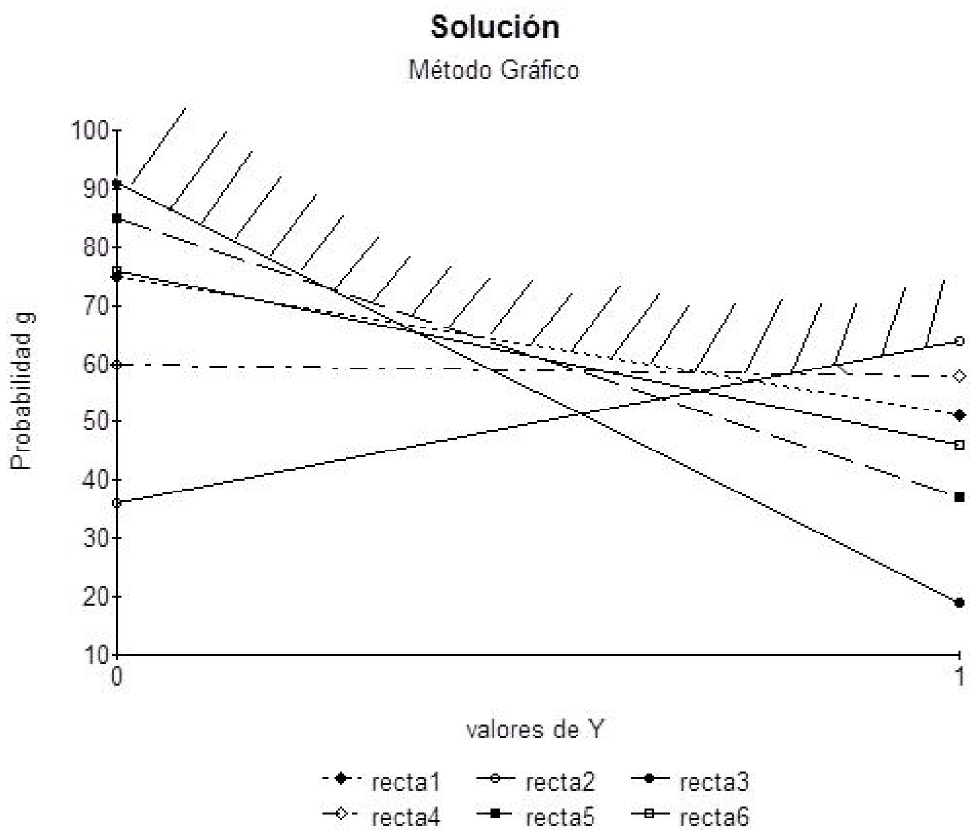
$0.91 - 0.72Y_1 = g$ (3)

$0.60 - 0.02Y_1 = g$ (4)

$0.85 - 0.48 Y_1 = g$ (5)

$0.76 - 0.30\ Y_1 = g \quad (6)$

La variable Y_1 comprendida entre 0 y 1 incluyendo los límites.



Utilizando el método gráfico para la solución del problema, se trazan las 6 rectas en el sistema de coordenadas (Y_1, g) Todo punto de la zona rayada constituye una solución posible, puesto que satisface todas las desigualdades, el valor más pequeño de g se encuentra en la intersección de las rectas 2 y 4.

$g=0.36 +0.28\ Y_1$

$g = 0.60 - 0.02Y_1$

Entonces $Y_1= 0.8, \quad Y_2 = 0.2, \quad g= 0.584$

Así que seleccionando esta estrategia los ladrones tienen una probabilidad no mayor de captura de 0.584, esto es, adoptando la estrategia de robar 4 de cada 5 (0.8) veces en A y 1 de cada 5 (0.2) veces en B.
Para conocer la estrategia de los policías, hay que admitir, sin demostración, dos propiedades fundamentales de la Teoría de Juegos.

1. Existe un número único g que constituye a la vez un límite superior para los ladrones y un límite inferior para los policías.

2. A toda desigualdad que no aparece en la solución óptima de los ladrones le corresponde para el adversario una variable nula.

Aquí el óptimo corresponde la intersección de las rectas 2 y 4 y son las ecuaciones para el óptimo del ladrón, por lo que X_1, X_3, X_5, y X_6 deben ser nulas, entonces

$0.54X_2 + 0.58X_4 = g = 0.584$

$0.36X_2 + 0.60X_4 = g = 0.584$
De donde,

$X_2 = 1/15$ $X_4 = 14/15$

Finalmente pasando 1/15 del tiempo los dos en A y 14/15 de su tiempo uno en C y otro en A los policías tendrán una probabilidad de captura igual a 0.584.

Ha surgido una interrogante......

Uno de los asesores del gerente del supermercado, al que se le mostró el problema hizo la observación que era interesante considerar la rentabilidad de la vigilancia.
Suponga que se suprime la televisión, entonces las combinaciones en las posiciones de los policías se reducen a:

Posición de los policías	Posición del ladrón		Estrategia de policías
	A	**B**	
AA	0.64	0.36	X_2
BB	0.19	0.91	X_3
AB	0.46	0.76	X_6
Estrategia del ladrón	Y_1	Y_2	

Las rectas a considerar son la 2, 3, y 6 y la solución óptima está dada por la intersección de las rectas 2 y 6, tal que: $Y_1 = 0.69$ $Y_2 = 0.31$, $X_1 = 0.53$ $X_3 = 0.47$ y g = 0.55. Por consiguiente la probabilidad de captura solo se incrementa en 0,034 gracias a la televisión, lo que plantea el problema de saber si este costoso equipo es verdaderamente útil para llegar a un resultado mínimo.

****

1. Teoría de probabilidad

Muchos de los eventos que ocurren en la vida diaria no pueden ser predichos con exactitud por distintas razones, la mayoría de los hechos están influidos por factores externos a los individuos que participan en ellos. Así, existen aquellos sucesos que están directamente influidos por el azar, es decir por procesos o situaciones que están fuera del control individual, por tanto no se puede estar seguro de que el suceso vaya a ocurrir.

La definición de probabilidad, como cualidad de probable, se hace necesaria en estos casos para medir, por alguna razón de interés, la posibilidad de que puede ocurrir un suceso o evento. La probabilidad es la característica de un evento que existen razones para creer que este se realizará.

El concepto de probabilidad nace con el deseo del hombre de conocer con certeza los eventos futuros, la idea que generalmente se tiene del término es adquirido en forma intuitiva, siendo esto suficiente para manejarlo en la vida corriente.

El estudio de probabilidades se inicia como una herramienta utilizada por los nobles para ganar en juegos y pasatiempos de su época, el desarrollo de estas herramientas fue asignado a matemáticos de la corte, surgiendo la Teoría de Probabilidad.

La Teoría de Probabilidad es la teoría matemática que modela los fenómenos aleatorios, un fenómeno aleatorio es aquel que, a pesar de realizarse el experimento bajo las mismas condiciones determinadas, tiene como resultados posibles un conjunto de alternativas. Estos experimentos deben contraponerse a los fenómenos determinísticos en los cuales el resultado de un experimento, realizado bajo condiciones determinadas, produce un resultado único o previsible.

La Teoría de Probabilidad permite acercase a los experimentos y sucesos aleatorios y estudiarlos, ponderando las posibilidades de su ocurrencia y proporcionando los métodos para tales ponderaciones.

La Teoría de Probabilidad permite estudiar los eventos de manera sistémica y más cerca a la realidad, retribuyendo este estudio con información precisa y confiable y, por tanto, más útil para aplicarla a diversas disciplinas humanas. Su interés es la medida numérica de la posibilidad de que ocurra un suceso cuando se realiza el experimento aleatorio. A esta medida se llama probabilidad del suceso.

2. Experimentos aleatorios y modelos matemáticos

El proceso de toma de decisiones y la solución de problemas tiene implícita una fase de observación de la realidad, deben analizarse y estudiarse los hechos de los cuales deseamos obtener conclusiones y por lo tanto, información para solucionar los problemas.

En la observación de la realidad se llevan a cabo experimentos cuyos resultados no están determinados por las condiciones bajo las cuales se realizan ya que son influenciados por el azar, por factores no controlables por parte del experimentador, como se indicó en los párrafos anteriores, a estos experimentos se le llaman experimentos aleatorios.

Un experimento aleatorio es cualquier operación o proceso físico que produce un resultado o una observación de una variable y cuyo resultado no puede predecirse con exactitud, debido a que las condiciones bajo las cuales se realiza no determinan completamente ese resultado. En el experimento aleatorio no existe un solo resultado posible, sino un conjunto de resultados asociados a él. El concepto de probabilidad es necesario en éste caso para evaluar la posibilidad de ocurrencia de cada uno de los resultados.

Para ejemplificar un experimento aleatorio, considere el caso del vendedor de periódicos que vende ambulantemente los ejemplares, lleva todos los días un número determinado de ellos, pero no sabe con exactitud cuántos venderá, la demanda está influenciada por el azar no por factores controlables por el vendedor.

2.1 Características de un experimento

1. Es posible repetir indefinidamente el experimento sin cambiar sustancialmente sus condiciones.

2. Aunque no se puede predecir un resultado en particular, se puede describir el conjunto de resultados posibles.

3. A medida que se repite el experimento, se repiten los resultados individuales, presentándose una regularidad estadística, esta regularidad permite generalizar un comportamiento a largo plazo y elaborar un modelo teórico que describa con

precisión el fenómeno observado, este modelo es llamado Modelo Matemático del experimento aleatorio.

Continuando con el caso el vendedor de periódicos, si el observa que todos los días vende entre 20 y 25 periódicos y que de 60 días registrados, 10 de ellos vendió 20 periódicos, en otros 10 días vendió 21 periódicos, y así sucesivamente, (10 días vendió 22 periódicos, 10 días vendió 23 periódicos, 10 días vendió 24 periódicos y 10 días vendió 25 periódicos), el modelo puede generalizarse estableciendo que con la misma frecuencia vende 20, 21, 22, 23, 24 o 25 periódicos.

Es importante, comprender la diferencia entre teoría y realidad, las teorías son sistemas de conceptos propuestos para explicar los fenómenos del mundo real, son aproximaciones de la realidad, y pueden ser representados por relaciones matemáticas, Modelos Matemáticos. Al escoger un modelo esperamos que este refleje fundamentalmente las características del proceso observado, de tal manera que se pueda utilizar para llegar a conclusiones sobre el proceso mismo, debe ser tan sencillo como sea posible, en él se omiten detalles, se simplifican los hechos, pero debe describir con suficiente exactitud los rasgos y propiedades de la realidad.

Los llamados Modelos Probabilísticos son los que permite escribir a los Experimentos Aleatorios y son estudiados en la Teoría de Probabilidad.

3. Probabilidad

Es una medida de la creencia que un evento futuro puede ocurrir, así, es una medida de la posibilidad que se produzca un hecho, un acontecimiento o un resultado en una serie de experimentos repetidos en condiciones similares. Como ejemplo puede escucharse decir que una máquina tiene un 5% de probabilidad de fallar en cierto periodo de funcionamiento, porque esto se ha evidenciado con la experiencia en la operación de la máquina.

Se mide la probabilidad de un suceso (A) por medio de un número entre cero y uno o su equivalente en porcentaje, entre cero y cien por ciento, representándola por la expresión P(A). Cuando más probable es, más próximo será a uno (100%), cuando menos probable, más próximo a cero (0%).

Como se puede imaginar, existen eventos que siempre, no importa la situación, ocurren y otros que nunca ocurren. Los que siempre ocurren son los eventos seguros y los que nunca son los eventos imposibles. En la teoría estudiada, al suceso imposible le corresponde la probabilidad igual a cero y para los seguros le corresponde un valor de probabilidad igual a uno.

4. Conceptos fundamentales

4.1 Espacio Muestral

Es el conjunto de todos los resultado posibles de un experimento, para definirlo hay que tener una idea clara de lo que se observa, ya que para el mismo experimento, conforme a un interés particular, pueden establecerse distintos conjuntos de resultados. Por ejemplo, al lanzar un par de dados, el espacio muestral estará formado por las parejas ordenadas (x, y) que representan respectivamente el número que muestra el primer dado y el segundo dado:

S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5) ,(1,6), (2,1), (2,2) ,(2,3) ,(2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) , (4,1), (4,2) ,(4,3) ,(4,4) ,(4,5) ,(4,6) ,(5,1) ,(5,2), (5,3) ,(5,4), (5,5) ,(5,6), (6,1) ,(6,2) ,(6,3), (6,4), (6,5) ,(6,6)}.

Este espacio muestral como parejas ordenadas puede ser de interés en el caso si se ganara una cantidad de dinero igual o proporcional a la suma de los dos números que aparecen, pero si la ganancia del juego es directamente proporcional al mayor de los números, el interés recaerá en anotar únicamente el mayor de los números no importando que dado lo mostró, así el especio muestral original podrá ser transformado a una variable aleatoria:

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

4.2 Suceso o evento

Una parte del espacio muestral se denomina evento o suceso, esto es, un subconjunto del espacio muestral.

Si se lanza un dado y se observa el número que muestra la cara superior, el espacio muestral se define como S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y un evento es A = {2,4,6} corresponde al subconjunto de los resultados pares que se pueden obtener.

Son sucesos especiales: el suceso universal, que contiene todos los resultado posibles, U = S = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }; el suceso elemental, que es el subconjunto que contiene solo un elemento y existe si el espacio muestral es un conjunto numerable. Así, al lanzar un dado son sucesos elementales A = {1} , B = {2}, C ={3} , etc.

4.3 Sucesos mutuamente excluyentes

Si dos o más sucesos de un espacio muestral no pueden ocurrir simultáneamente se dice que son excluyentes o disjuntos. Es decir la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento u otros eventos.

Considere nuevamente el lanzamiento de un dado, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sea A el evento la cara del dado muestra un número par, A = {2, 4, 6} y sea B el suceso la cara del dado muestra un número impar, B = {1, 3, 5}, A y B son excluyentes no pueden ocurrir simultáneamente, un número no es par e impar a la vez.

Si es posible que de dos sucesos ocurran juntos se dice que son no excluyentes o conjuntos, esto no indica que necesariamente deben ocurrir estos eventos en forma simultánea, para estos sucesos se puede definir otro suceso denominado Intersección ($\cap$) que implica la ocurrencia de los dos (A y B). Este concepto puede generalizarse a más de dos sucesos.

Así, en el lanzamiento del dado, sea C el suceso la cara del dado muestra el número divisible por 3, entonces C = {3, 6 }, A y C no son excluyentes, existe un número que implica la ocurrencia de uno y el otro, la cara del dado muestra un número par y divisible por tres, $A \cap C$ = {6}

4.4 Suceso complementario

En un espacio muestral al definir un evento E se puede determinar un evento complementario al mismo E^c que implica la no ocurrencia de E.

Sea A el suceso definido anteriormente, la cara del dado muestra un número par, A^c se define entonces como la cara del dado no muestra un número par, A^c = { 1, 3, 5 } y es igual al suceso B

4.5 Unión de sucesos

Si en un espacio muestral se definen una serie de sucesos A, B, C, etc. Se pueden determinar otros sucesos a través de la Unión (U) de los ellos.

Z = A U B es el suceso unión de A y B, que ocurre si al menos uno ocurre, esto es A o B ocurren. Este concepto se puede generalizar para más de dos sucesos.

Sean A y C los sucesos definidos en los párrafos anteriores,

AUC = { 2, 4, 6, 3}

La cara del dado muestra un número par o un número divisible por tres.

Ejemplos:

2.1. Considere el siguiente experimento: se elige un número al azar entre el 1, 2, 3, 4, ó 5 y se elige un color entre el rojo, el verde y el azul.

Por lo tanto, el espacio muestral del experimento está dado por el conjunto de parejas:

S = { (1,R), (1,V), (1,A), (2,R), (2,V), (2,A), (3,R), (3,V), (3,A), (4,R), (4,V), (4,A), (5,R), (5,V), (5,A)}

Si se define el suceso A como "elegir el número 1 o el 2 y el color rojo", este suceso está formado por las parejas (1,R) y (2,R)

A = { (1,R), (2,R)}

Si se define el suceso B como "elegir un número impar y el azul" este suceso está formado por las parejas (1,A), (3,A), (5,A),

B = { (1,A), (3,A), (5,A) }

Se hace notar que el espacio muestral está formado por 15 parejas, por lo que es un conjunto numerable y se denomina espacio muestral discreto y es finito.

2.2. Considere el experimento que consiste en realizar una carrera de 100 metros, si el tiempo empleado en llegar a la meta puede estar comprendido entre 5 y 20 segundos:

El espacio muestral del experimento es el conjunto $S = \{ t / 5 \leq t \leq 20\}$

El suceso A, " el corredor llega después de 10 segundos" se identifica ,

$$A = \{ t/10 < t \leq 20\} = \{ t / t > 10\}$$

El suceso B, "el corredor llega a la meta en menos de doce segundos pero en más de seis" se identifica,

$$B = \{ t/ 6 < t < 12\}$$

El suceso A intersección B se define como "el corredor llega a la meta en menos de 12 segundos pero en más de 10",

$$C = A \cap B = \{ t/ 10 < t < 12\}$$

El suceso D "el corredor llega a la meta en a lo más doce segundos y una centésima ", se identifica:

$$D= \{ t / 5 \leq t \leq 12.01 \}$$

El espacio muestral de este experimento está formado por infinitos puntos en el segmento $5 \leq t \leq 20$ de los números reales, a este espacio muestral se le denomina espacio muestral continuo y que sus elementos se consideran no numerables.

2.3. Al seleccionar una persona al azar y clasificarla de acuerdo a su grupo sanguíneo, se le puede ubicar en el grupo O, A, B, o AB. El conjunto de todas las posibles clasificaciones es el espacio muestral (S) del experimento

S= { O, A, B, AB}

Una persona puede clasificarse en el grupo A o en el grupo O pero no puede clasificarse en los dos grupos, los eventos X: la persona tiene sangre tipo A y Z: la persona tiene sangre tipo O son excluyentes porque no pueden ocurrir juntos.
Si el suceso E se define como, "al sujeto le corresponde la clasificación B", el suceso Complemento de E (E^c), está definido como la no ocurrencia de E, el sujeto no tiene tipo de sangre B, que incluye a los grupos O, A, AB

E= { B } E^c ={ O, A, AB}

Resuelva

2.4 Dos tabletas contra el resfriado se colocan accidentalmente en una caja que contiene 2 tabletas de aspirina, las cuatro tabletas son idénticas. El paciente A toma una tableta de la caja y se la toma, luego el paciente B selecciona una de las tres restantes y se la toma.
a) Numere el espacio muestral considerando sus 12 elementos.
b) Identifique el suceso X, el paciente A sacó una tableta contra el resfrío.
c) Enumere el suceso Y de que exactamente uno de los dos pacientes sacó una tableta contra el resfrío.
d) Indique el suceso W, ninguno secó una tableta contra el resfrío.

2.5 Dos focos se mantienen encendidos hasta que dejan de funciona. Se supone que ninguno durará más de 1600 horas. Defina el espacio muestral del experimento y los sucesos:
A: ambos focos duran menos de 1000 horas.
B: Ninguno se funde antes de las 100 horas.
C: El menor tiempo de duración de las dos es 100 horas

5. Probabilidad de un suceso

La probabilidad es una medida sobre la escala de 0 a 1 de tal forma que, como ya se indicó, al suceso imposible le corresponde el valor de 0, al suceso seguro le corresponde el valor de 1, así, los otros sucesos tendrán una probabilidad comprendida entre 0 y 1

El concepto de probabilidad, no es único, se puede considerar desde distintos puntos de vista: el objetivo y el subjetivo y a través de la historia se han desarrollado tres enfoques conceptuales diferentes para definir la probabilidad y determinar los valores de probabilidad.

- El enfoque cásico

Establece que si hay x posibles resultados favorables a la ocurrencia de un evento A y z posibles resultados desfavorables la ocurrencia del evento A, y todos los resultados son igualmente posibles y mutuamente excluyentes (no pueden ocurrir dos o más resultados al mismo tiempo) entonces la probabilidad de que ocurra A es $P(A) = x / (x+z)$

Este enfoque es llamado enfoque a priori porque permite (en el caso de que pueda aplicarse) calcular la probabilidad antes de observar cualquier evento de muestra. El enfoque clásico se basa en el supuesto de que cada resultado del experimento es igualmente posible que los otros. Este punto se amplía más adelante al desarrollar el tema de Equiprobabilidad.

- El enfoque de frecuencia relativa

Cuando un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, los posibles resultados tienden a presentarse con una frecuencia muy parecida, la regularidad estadística, lo cual indica que la frecuencia de aparición de cada resultado tiene a estabilizarse.

El enfoque de frecuencia relativa, llamado también enfoque empírico, determina la probabilidad sobre la base de la proporción de veces que ocurre un evento favorable en un número de observaciones realizadas del experimento. La determinación de los valores de probabilidad se base en la observación y recopilación de datos. Se continuará con la definición frecuentista de probabilidad más adelante.

- El enfoque subjetivo

Existen muchos experimentos que no se pueden repetir bajo las mismas condiciones, y por tanto, no puede aplicarse la interpretación objetiva de probabilidad. En estos casos es necesario acudir a un punto de vista alterno, que no dependa de las repeticiones sino que considere la probabilidad como un concepto subjetivo que exprese el grado de creencia o confianza individual sobre la posibilidad de que el suceso ocurra. Se trata de un juicio personal y es posible, por tanto, que diferentes observadores tengan distintos grados de creencia sobre las posibilidades de los resultados y que son igualmente válidos.

La probabilidad de ocurrencia de un evento es el grado de creencia por parte de un individuo que un suceso ocurra, basado en toda la evidencia a su disposición. Bajo esta premisa se puede decir que este enfoque es adecuado cuando solo hay una oportunidad de ocurrencia del evento, es decir el evento ocurrirá o no ocurrirá una sola vez.

6. Definición axiomática de probabilidad

La definición axiomática de probabilidad es quizás la más simple de todas las definiciones ya que está basada en un conjunto de axiomas que establecen requisitos mínimos para dar una definición de probabilidad. La ventaja de esta definición es que permite un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad. Fue introducida por Kolmogorov y aceptada por estadísticos y matemáticos en general.

Esta aproximación axiomática que generaliza el marco clásico de la probabilidad, la cual obedece a la regla de cálculo de casos favorables sobre casos posibles permitió dar solidez muchos argumentos ya utilizados.

7. Teoremas de probabilidad

Dado un experimento aleatorio con un espacio muestral S, en el que se identifican n sucesos (E_1, E_2, E_3, ... E_n) se tiene que a cada uno de los sucesos se le puede asignar un número positivo denotado por P (Ei), que se le llama probabilidad de Ei (i = 1, 2, 3, 4... n) y mide la posibilidad de ocurrencia de ese resultado. P(Ei) satisface la siguientes condiciones:

I. P(Ei) para i = 1, 2, 3....n es un número positivo entre cero y uno.

$$0 \leq P(Ei) \leq 1$$

P(Ei), próximo a uno implica una mayor probabilidad de ocurrencia, próximo a cero una menor probabilidad de ocurrencia.

II. Por definición, el espacio muestral S incluye todos los resultados posibles del experimento, por lo que:

$$P(S) = 1$$

No existe resultado posible fuera del espacio muestral.

Si los suceso identificados en S son mutuamente excluyentes y su unión constituye el espacio muestral, la suma de las probabilidades de los sucesos es igual a uno

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)+ .... P(E_n) = 1$$

III. Si se consideran dos eventos, E_1 y E_2 mutuamente excluyentes, la probabilidad que ocurra el evento E_1 o el evento E_2 es igual a la suma de las probabilidades individuales de E_1 y de E_2

$P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ ocurran}) = P(E_1UE_2)= P(E_1) + P(E_2)$

IV. Si E_1, E_2 y E_3 son sucesos excluyentes, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 o E_3 es la suma de las probabilidades individuales.

$P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3) = P(E_1UE_2UE_3)=P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

V. Si se consideran dos eventos, E_1 y E_2 mutuamente excluyentes, la probabilidad que ocurra el evento E_1 y el evento E_2, $(E_1 \cap E_2)$, es igual a cero.

$P(E_1 \cap E_2) = 0$

VI. Si se consideran los eventos Ei y Ei^c, mutuamente excluyentes, la probabilidad de que Ei o Ei^c ocurran es: $P(Ei \text{ o } Ei^c) = P (Ei \text{ U } Ei^c) = P(S) = 1$ entonces $P(Ei) + P(Ei^c) = 1$, y

$$P(Ei^c) = 1 - P(Ei)$$

Por otra parte, para sucesos cualesquiera, siempre que se conozca su probabilidad de ocurrencia, se cumple que:

VII. Si A_1 y A_2 son sucesos cualesquiera, la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A_1, o A_2 (únicamente A o solo B o ambos ocurran) es la suma de las probabilidades individuales menos la probabilidad de que ocurran simultáneamente.

$P (A_1 \text{ o } A_2) = P(A_1UA_2)= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

VII: Si Ai, i = 1, 2, 3... son sucesos cualesquiera, la probabilidad de que al menos uno de los suceso Ai ocurra es:

$P(A_1 \text{ U } A_2, \text{ U } A_3...\text{U } Ai...) = P(A_1) + P(A_2) +P(A_3)+....+ P(Ai)......$

$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) - .... - ... P(A_1 \cap Ai) .... + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+ P(A_1 \cap A_2 \cap Ai) +...... - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_1) -......$

Ejemplo

2.6. Suponga que A y B son sucesos de un experimento para los cuales:

$P(A) = x$ $P(B)= y$ $P(A \cap B) = z.$

Entonces:

A. $P(A^c \text{ U } B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$

$P(A^c) = 1\text{-}x \quad P(B^c) = 1\text{-}y$

$P(A^c \cap B^c) = P(AUB)^c = 1\text{-} P(AUB) = 1\text{-}x\text{-}y\text{+}z$

$P(A^c U B^c) = (1\text{-}x) + (1\text{-}y) - (1\text{-}x\text{-}y\text{+}z) = 1\text{-}z$

B. $P A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = y - z$

Resuelva

2.7 Sea S = {a_1, a_2, a_3} calcular las probabilidades de los sucesos elementales sujetas a las siguientes condiciones
$p_1 = 2p_2$ y $p_2 = 2p_3$
R: $p_3 = 1/7$; $p_2 = 2/7$ y $p_1 = 4/7$

2.8 Un grupo de adultos se clasifican de acuerdo a si sus primeros molares están cariados (A), Obturados (B), o sanos (C), con las siguientes probabilidades asociadas
$P(A) = 0.14$ $P(B)= 0.61$ $P(C)= 0.29$ $P(A \cap B) = 0.04$
Si se selecciona al azar una persona de este grupo la probabilidad de que:
a) Sus primeros molares tengan caries pero no estén obturados es. R.0.1
b) Tengan caries o estén sanos. R.0.43
c) Cariado obturado o ambas cosas. R.0.71

8. Definición frecuentista de la probabilidad

Para medir la posibilidad de ocurrencia de un evento particular en un experimento, existe una determinación práctica, esta consiste en repetir el experimento un número grande de veces, n, calcular la frecuencia con que se dio el evento y posteriormente la proporción o porcentaje de ocurrencia, denominada su frecuencia relativa (fr).

La definición frecuentista consiste en definir la probabilidad como el límite cuando n tiende al infinito de la proporción o frecuencia relativa del suceso.

Sea un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es S. Sea A cualquier suceso perteneciente a S, si se repite n veces el experimento, bajo las mismas condiciones, la frecuencia relativa del suceso A será igual a cociente del número de veces que aparece el suceso A (m) y número de veces que se repite el experimento (n).

Cuando el número de repeticiones que se hace es muy grande la frecuencia relativa converge hacia un valor que llamamos probabilidad del suceso A.

Es imposible llegar a este límite, ya que no se puede repetir el experimento un número infinito de veces, pero si se puede repetir muchas veces y observar como las frecuencias relativas tienden a estabilizarse.

Esta definición se llama también probabilidad a posteriori ya que solo se puede dar la probabilidad de un suceso después de repetir y observar un gran número de veces el experimento aleatorio correspondiente, algunos autores le llaman probabilidad teórica.

Tanto el enfoque clásico como el enfoque empírico conducen a valores objetivos de probabilidad, en el sentido de que los valores de probabilidad indican a largo plazo la tasa relativa de ocurrencia del evento.

Frecuencia relativa como aproximación de la probabilidad de un evento

Si algún proceso se repite un gran número de veces (n) y si un evento resultante A, ocurre m de las n veces, la frecuencia relativa de E es:

$$fr(A)= m/n$$

y será aproximadamente igual a la probabilidad de ocurrencia de E, P(E), en tanto n tienda al infinito.

La dificultad de utilizar la frecuencia relativa como método para estimar probabilidades es que su cálculo debe hacerse después de haber realizado n veces el experimento y esto motiva varias interrogantes:

¿Es posible realizar n veces el experimento?....

¿Qué tan grande debe ser n?...

Estas son preguntas que el experimentador contestará de acuerdo a su situación particular, y en referencia a la Teoría de la Estimación Estadística, fuera del alcance de este material.

Ejemplo

2.9 En un grupo de personas se seleccionó una muestra de 502 y se determinó la distribución de los grupos sanguíneos se da de la siguiente forma:

Grupo Sanguíneo	Frecuencia
O	226
A	206
B	50
AB	20

Si se selecciona al azar una persona de ese grupo, la probabilidad que tenga sangre tipo A es estimada por fr(A) = 206/502 = 0.41

2.10 En un grupo de 200 propietarios de autos 34 tienen al menos un Mazda, 78 al menos un Toyota, 7 ambas marcas y los restantes otras marcas. Estime la probabilidad de que al entrevistar a un propietario de autos posea:

A. Un auto Mazda (M) o Toyota (T)

$P(M \cup T) = (27+7+71) / 200 = 0.525$

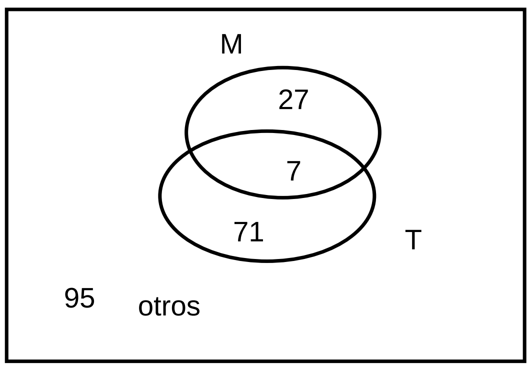
B. No tenga un Toyota

$P(T^c) = (95+27) / 200 = 0.65$

C. Tenga solo Mazda

$P(M) - P(M \cap T) = (34 - 7)/ 200 = 27/200$

Gráfico de Venn para la distribución de propietarios



Resuelva

2.11 Se toman muestras de una pieza fundida de aluminio y se clasifica de acuerdo con el acabado de la superficie y las condiciones de longitud a continuación se resumen los resultados de 100 muestras

	Longitud	
Acabado	buena	excelente
Excelente	7	75
Bueno	8	10

Sea A el evento donde la muestra tiene un acabado excelente y B el evento donde la muestra tiene una longitud excelente

Determine la probabilidad de los siguientes eventos si se selecciona una muestra al azar:

a) A U B
b) $A^c \cap B$
c) B^c

9. Espacios Muestrales Finitos

Un Espacio Muestral se denomina finito cuando el conjunto de todos los posibles resultados está constituido por un conjunto finito numerable de elementos S = { a_1, a_2, a_3...ai...a $_{k-1}$, a_k}

Este tipo de espacio permite aplicar varios procedimientos matemáticos para el cálculo de las probabilidades de cada uno de los elementos y a través de las combinaciones de los mismos, plantear otros sucesos posibles y determinar su probabilidad.

Considere el espacio muestral S , definido anteriormente, dividido en k sucesos elementales, A_1 = { a_1 }, A_2 = { a_2 } , A_3 = { a_3 }... etc. A cada uno de los sucesos Ai, i= 1,2...k, se le puede asignar un número Pi que representa su probabilidad de ocurrencia, y cumple con las condiciones siguientes:

1. Si S = A_1U A_2, U A_3 ..... U A_i U A_k . Y cada uno de los sucesos es excluyente de los otros, entonces

$$P(S) = P_1 + P_2 + P_3 ...+ P_i +P_k = 1$$

2. Pi $\geq$ 0 para todo suceso i

A partir de este planteamiento se puede formar cualquier suceso B representándolo por la unión de dos o más sucesos elementales así: Si B está formado por 3 elementos, B = { a_1, a_2, a_3 }, entonces B= {A_1 U A_2 U A_3} y la probabilidad de B es: P(B) = P_1+P_2+ P_3

Para calcular las probabilidades Pi pueden seguirse varios procedimientos

- Realizar el experimento varias veces y calcular la frecuencia relativa.
- Asumir por experiencia algunos valores y/o relaciones de probabilidad.
- Considerar cada uno de los resultados igualmente probables.

10. Definición clásica de probabilidad

Sea un experimento aleatorio cuyo correspondiente espacio muestral S está formado por un número n finito de posibles resultado (a_1 , a_2, …a_n) con la misma

probabilidad de ocurrir para cada uno. Si n_1 resultados constituyen el subconjunto o suceso A_1, n_2 resultados constituyen el subconjunto o suceso A_2 y en general n_k resultados constituyen el subconjunto o suceso A_k la probabilidad de cualquier suceso Ai es igual a cociente entre el número de casos favorables que integran el suceso Ai y el número de casos posibles del espacio muestral S (regla de Laplace para espacios finitos)
La aplicación de la definición clásica puede presentar dificultades cuando el espacio muestral es infinito o cuando los posibles resultados de un experimento no son equiprobables.

Eventos equiprobables

Si un experimento tiene k resultados posibles, mutuamente excluyentes, puede suponerse por experiencia y con una adecuada justificación que son igualmente probables, entonces la probabilidad de cada uno de los resultados es 1/ k

$P(A_i)= 1/k \qquad i= 1,2,3...k$

Además si m de estos elementos forman un evento E, la probabilidad de ocurrencia de E es m/k.

Considere el lanzamiento de una moneda, basándose en el supuesto de que la moneda está balanceada y que no existe otra forma de influir en su lanzamiento que no fuera el azar, se establece que los resultados son equiprobables. Así de su espacio muestral S = {c, e} pueden formarse dos sucesos elementales A = {c} y B = {e} , cada uno con probabilidad 1/2.

Ejemplo

2.12 Se colocan en fila cuatro platos de colores diferentes con alimento para perros, Azul, Rojo, Verde y Blanco. Si un perro escoge uno, supuestamente al azar, esto es, el perro no evidencia preferencia por ninguno, la probabilidad de que seleccione el azul es 1/4

El espacio muestral, S={ Azul, Verde, Rojo, Blanco} , está formado por k= 4 elementos, por lo tanto pueden formase 4 sucesos elementales y cada suceso elemental tiene probabilidad de ¼.

A = { azul } B = { verde} C={ rojo} D= { blanco }
P(A)= 1/4 = P(B) = P(C) = P(D)

Resuelva

2.13 Se saca al azar un naipe, de una baraja que contiene 52 cartas.
¿Cuál es la probabilidad de que sea roja (A)? R: 26/52
¿De que sea un as (B)? R: 4/52
¿De que sea un as de diamante (C)? R: 1/52
¿De que sea un as y carta roja (D)? R: = 2/52
¿Que sea un as o una carta roja (E)? R: = 28/52

Para resolver esta clase de problemas, algunas veces es necesario recurrir al uso de Técnicas de Conteo, por lo que el lector puede referirse al Anexo 1 donde se presenta esta temática.

Ejemplos adicionales

2.14 Como parte de un estudio de contaminación de aire, un inspector decide examinar la emisión de gases de 6 de 24 carros de carga de una compañía. Si 4 de los camiones emiten cantidades excesivas de contaminante, ¿cuál es la probabilidad que ninguno de ellos sea incluido en la muestra?

A = Ninguno de los camiones con niveles excesivos de contaminante pertenece a la muestra
$P(A) = {}_4C_0 * {}_{20}C_6 / {}_{24}C_6 = 0.288$

¿Cuál es la probabilidad que exactamente uno con nivel excesivo de contaminante se incluya en la muestra?

B= Un camión con niveles altos de contaminante se incluye en la muestra
$P(B) = {}_4C_1 * {}_{20}C_5 / {}_{24}C_6 = 0.576$

2.15 Considere el problema de seleccionar 2 aspirantes de un grupo de 5 para un empleo encuentre la probabilidad del evento escoger exactamente uno de los 2 mejores
$P(A) = {}_2C_1 * {}_3C_1 / {}_5C_2 = 6/10 = 3/5$

11. Sucesos Independientes y Sucesos Dependientes

Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no tiene efecto sobre la probabilidad del otro u otros eventos. Por ejemplo, al lanzar al aire dos veces una moneda son eventos independientes los resultados que aparecen en cada moneda, el resultado del primer evento (por ejemplo cara en la primera moneda), no afecta la probabilidades de que ocurra cara o cruz en el segundo lanzamiento.

Sin embargo, en algunas ocasiones dos sucesos(A y B) se relacionan de manera que la probabilidad de ocurrencia de uno (A) aumenta o disminuye dependiendo si el otro (B) ha ocurrido o no, en ese caso se dice que los eventos son dependientes.

Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro u otros. Cuando se tiene ese caso entonces, se emplea el concepto de probabilidad condicional.

12. Probabilidad condicional

Se llama probabilidad condicional a la probabilidad de que un suceso se ocurra habiéndose cumplido ya otro. Se representa la probabilidad de que ocurra el suceso A dado que ya ocurrió el suceso B de la siguiente manera P(A/B). La probabilidad condicional puede calcularse aplicando el concepto de frecuencia relativa o por la relación de probabilidades siguiente:
$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$

Propiedades

- $0 \leq P(A/B) \leq 1$
- $P(S/B) = 1$
- Si A_1, A_2, A_3 son suceso excluyentes:
- $P(A_1 U A_2 U A_3 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B) + P(A_3/B)$
- Si A y B son sucesos excluyentes $P(A/B) = 0$

Ejemplo

2.16 Suponga el experimento que consiste en observar la condición del tiempo en un día específico. Sea A el evento, observar un día lluvioso y B el evento un día nublado. Si consideramos únicamente los días que está nublado (B), la fracción de esas observaciones en las que sucede A (lluvia) es la probabilidad condicional de A dado B, P(A/B).

2.17 En un estudio del comportamiento después de tratamiento de un número de drogadictos, se sugiere que las probabilidades de reincidencia dentro de los dos años siguientes al tratamiento depende de la educación de los transgresores. Las proporciones del número de casos que se sitúan en cuatro categorías de educación y reincidencia se presentan a continuación:

Educación	Condiciones dentro del periodo de dos años reincidencia		
	Si	No	Total
10 o más años	0.10	0.30	0.40
9 o menos años	0.27	0.33	0.60
Total	0.37	0.63	1.00

Si se selecciona una persona al azar del grupo en tratamiento, la probabilidad de que tenga 10 años o más de educación (A) dado que reincidió dentro de los 2 años (B) es:

$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.1/ 0.37$

Que representa la fracción de reincidentes que tienen 10 o más años de educación.

2.18 En un grupo de 36 estudiante hay nueve que dominan el idioma Inglés y cuatro el francés, dos de ellos ambos idiomas (ya contados entre los anteriores) Se selecciona al azar un alumno y se comprueba que domina el inglés ¿cuál es la probabilidad de que domine el francés?

A = domina el francés $P(A) = 4 /35$
B = domina el inglés $P(B) = 9/35$
$P(A \cap B) = 2 / 35$

P A/ B) = (2/35) / (9/35) =) 2 /9

Resuelva

2.19 Se clasifican muestras de aluminio fundido con base en el acabado de la superficie y las mediciones de la longitud, los resultados de las 100 piezas se resumen a continuación

Acabado superficial	Longitud	
	Excelente	Buena
Excelente	75	7
Buena	10	8

Sea A el evento que denota que una muestra tiene acabado excelente, sea B el evento que una muestra tiene longitud excelente, determine
Si la pieza tiene superficie excelente, cuál es la probabilidad de que la longitud sea excelente? R: 75/82

Si la pieza seleccionada tiene buena longitud, cuál es la probabilidad de que el acabado sea excelente? R: 7/15

2.20 Si dos eventos A y B tienen las siguientes probabilidades P(A) = 0.5 P(B) = 0.3 P(A ⋂ B) = 0.1 calcule

P (A/B) R:0.33
P (B/A) R: 0.2
P (A/AUB) R: 0.7142

P (A/ A ⋂ B) R: 1
P (A ⋂ B) / AUB) R: 0.1428

13. Teorema de la multiplicación de probabilidades

Una consecuencia de la probabilidad condicional es el Teorema de la Multiplicación de Probabilidades que permite calcular la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos simultáneamente, y se describe de la forma siguiente:

La probabilidad de que tenga lugar conjuntamente dos sucesos es igual al producto de la probabilidad del primero de ellos multiplicado por la probabilidad de que el segundo se produzca una vez que se haya producido el primero. Esto es la probabilidad de que ocurran conjuntamente los eventos A y B.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$$

Ejemplo

2.21. Considere una urna con 10 esferas de las cuales 6 son rojas y 4 son azules, se eligen 2 al azar sin sustitución, una después de otra, la probabilidad de que las dos sean rojas se calcula de la forma siguiente:

Sea A el suceso, la primera bola es roja.
Sea B el suceso la segunda bola es roja.

El espacio muestral antes de la primera extracción consta de 10 elementos y la probabilidad de seleccionar una roja es 6/10, P(A).

El espacio muestral para la segunda extracción, consta de 9 elementos, con el supuesto que previamente se seleccionó una esfera roja, este espacio está formado por 5 rojas y 4 azules. La probabilidad de que la segunda esfera sea roja es 5/9, P (B/A). Note que los eventos son dependientes.

Sea C el suceso las dos son rojas, C puede representarse por la intersección de los sucesos A y B.

$$P(C) = P(A) * P(B/A) = 6/10 * 5/9 = 1/3$$

2.22 En una industria el 96% de los artículos producidos pasa por un control (A) y de 100 artículos controlados 75 son reconocidos como de primera calidad (B), la probabilidad de que un artículo fabricado por esa industria sea controlado y reconocido como de primera calidad ($A \cap B$) se determina de la siguiente forma:

$$P(A) = 0.96 \qquad P(B/A) = 0.75$$

$$P(A \cap B) = 0.96 * 0.75 = 0.73$$

El teorema puede aplicarse cuando se requiere calcular la probabilidad de que tres o más sucesos ocurran, así
$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B/A) * P(C/A, B)$

Resuelva

2.23 En una ciudad el 40% de los votantes son republicanos y el 60% son demócratas, el 70% de los republicanos y el 80% de los demócratas están a favor de una emisión particular de bonos, se selecciona al azar un votante. ¿Cuál es la probabilidad que esté a favor de la emisión de bonos y será republicano? ¿Cuál es la probabilidad de que esté en contra de la emisión de bonos y sea demócrata?

14. Teorema de la multiplicación para eventos independientes

Anteriormente se señaló que si la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso (A), no afecta en forma alguna a otro suceso particular (B) y además no permite conocer de ninguna forma la probabilidad de ocurrencia de éste último, entonces se considera que éstos son sucesos Independientes.

$$P(A / B) = P(A)$$

$$P(B / A) = P(B)$$

Para determinar la probabilidad de que se produzca la ocurrencia de estos dos sucesos independientes, se multiplican las probabilidades de que ocurra cada uno de ellos en forma individual

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Si se lanza dos veces una moneda, el espacio muestral asociado a cada lanzamiento es $S = \{ c, e \}$ y es un espacio equiprobable, $P(c) = P(e) = 1/2$.

Sea A el suceso la moneda muestra cara en el primer lanzamiento

Sea B el suceso la moneda muestra cara en el segundo lanzamiento

Entonces la probabilidad que en los dos lanzamientos muestre cara se calcula considerando que cada lanzamiento es independiente del otro:

$$P(A \cap B) = 1/2 * 1/2 = 1/4$$

Este teorema puede generalizarse considerando más de dos sucesos, se tiene que: los sucesos A, B, C son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) * P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) * P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$$

Lo anterior se generaliza para más de tres sucesos.

Es importante anotar que si A y B son sucesos independientes, la probabilidad del suceso C = AUB se puede determinar de acuerdo al teorema de probabilidad de la unión de sucesos de la siguiente forma:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A)* P(B)$$

Ejemplo

2.24 Un operario vigila el funcionamiento de tres telares. La probabilidad de que los telares funcionen correctamente durante la jornada de trabajo es 0.9 para el primer telar, 0.8 para el segundo y 0.85 para el tercero. Con el supuesto que los telares funcionan independientemente y definiendo los sucesos:

A = el primer telar funciona correctamente durante la jornada de trabajo.

B= el segundo telar funciona correctamente durante la jornada de trabajo.

C = el tercer telar funciona correctamente durante la jornada de trabajo.

A. La probabilidad de que los tres telares funcionen correctamente durante la jornada de trabajo es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)*P(B)*P(C)= 0.9* 0.8*0.85 = 0.62$$

B. La probabilidad de que por lo menos uno de los tres trabaje correctamente en la jornada de trabajo es:

$$P(AUBUC)= 1 -P(A^c \cap B^c \cap C^c)= 1 - 0.1*0.2*0.15 = 0.997$$

Que representa la probabilidad de que funcione correctamente el primero o el segundo o el tercero, al menos uno funciona correctamente, y es igual a uno menos la probabilidad del suceso complemento: los tres no funcionan correctamente.

Existen variedad de aplicaciones en las que se puede suponer independencia después de un cuidadoso análisis de las situaciones en las que se realiza el experimento y considerar este concepto como el modelo teórico que presenta errores despreciables al modelar la realidad

Resuelva

2.25 Un sistema para detectar humo utiliza 2 dispositivos: A y B, si hay humo la probabilidad de detectarlo por el dispositivo A es 0.95, por el dispositivo B es 0.98 los cuales operan en forma independiente. Si hay humo encuentre la probabilidad de que:
a. sea detectado por al menos uno de los dispositivos R: 0.999
b. sea detectado por ambos R: 0.931

15. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

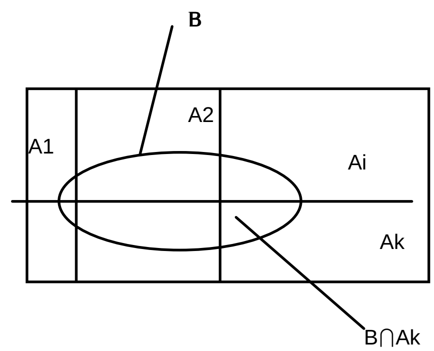
Considere un experimento aleatorio y el espacio muestral S asociado al mismo, se dice que los sucesos $A_1, A_2, A_3...A_i,..\ A_k$ forman una partición de S si:

Los sucesos $A_1, A_2, A_3...A_i...\ A_k$ son excluyentes para todo i.

$A_1UA_2U\ A_3U......\ U\ A_i\ U\ A_k = S$

$P\ (Ai) \geq 0$ para toda i

Sea B un suceso asociado con el experimento, si existe una partición de S entonces B puede representarse por medio de las relaciones de los sucesos $A_1,A_2, A_3...A_{i...}\ A_k$ de la partición y de igual forma la probabilidad que le corresponde, esto es.



$B= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup (A_k \cap B)$
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(Ai \cap B) + P(A_k \cap B)$
$P(B)= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)......+P(Ai)P(B/Ai)....+ P(A_k)P(B/A_k)$

La última expresión se conoce como el Teorema de la Probabilidad Total , útil cuando el interés es calcular la probabilidad del efecto B que puede ser motivado por varias causas Ai, i= 1,2..k.

Ejemplo

2.26 Para la siembra se preparan simientes de trigo de primera selección mezcladas con pequeñas cantidades de semillas de segunda, tercera y cuarta selección. Si se sabe que las probabilidades de que un grano escogido al azar pertenezca a una u otra clase son las siguientes:

$P(A_1) = 0.96 \quad P(A_2) = 0.01 \quad P(A_3)= 0.02. \quad P(A_4) = 0.01$

Y además, que la probabilidad para que la semilla engendre una espiga de 50 granos como mínimo (B) es 0.5 para la primera selección, 0.15 para la segunda, 0.20 para la tercera y 0.05 para la cuarta. Esto es:

$P(B/A_1) = 0.5 \quad P(B/A_2) = 0.15 \quad P(B/A_3) = 0.20 \quad P(B/A_4) = 0.05$

La probabilidad de que una espiga engendrada por una semilla escogida al azar tenga 50 granos como mínimo es:

$P(B)= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) + P(A_4)\,P(B/A_4)$

$P(B) = 0.96 * 0.5 + 0.01 * 0.15 + 0.02 * 0.2 + 0.01 * 0.05 = 0.486$

Resuelva

2.27 Un artículo es producido en una fábrica por tres máquinas diferentes, A y B, que producen la misma cantidad y C que produce el doble. Se sabe que A produce el 2 % de defectuosos y B y C produce el 4 % de defectuosos.
Si se elige un producto al azar de la producción cuál es la probabilidad de que este sea defectuoso. R: 0.035

Por otra parte dado la ocurrencia de un efecto B, el Teorema de Bayes permite calcular la probabilidad de que éste se haya debido a cierta causa Ai, esto es, dado que ha ocurrido el suceso B se requiere calcular la probabilidad de que haya ocurrido el suceso Ai de la partición.
$P(Ai/B) = P(A \cap B) / P(B)$

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai) * P(B/Ai)}{P(A_1)*P(B/A_1)+P(A_2)*P(B/A_2)......+P(Ai)*P(B/Ai)+ P(A_k)*P(B/A_k)}$$

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai) * P(B/Ai)}{\sum_{i=1}^{k} P(Ai) * P(B/Ai)}$$

Ejemplo

2.28. Dos proveedores de materiales X y Z entregan la misma pieza a un fabricante que guarda todas las existencias en la misma estantería, algunas de ellas no cumplen con las especificaciones, N. Los antecedentes demuestran que el 5 % de las entregadas por X "están no conforme con las especificaciones" y que el 9% de las entregadas por Z "están no conforme con las especificaciones". X entrega 4 veces más piezas que Z, si se selecciona una pieza al azar y se encuentra que "no cumple con las especificaciones", la probabilidad de que la haya fabricado X es:
$P(X) = 4/5$ $P(Z) = 1/5$
$P(N/X) = 0.05$ $P(N/Z)= 0.09$

$$P(X/N)= P(X \cap N) / P(N) = \frac{P(X)* P(N/X)}{P(X) *P(N/X) + P(Z)*P(N/Z)}$$

$$P(X/N) = \frac{4/5* 0.05}{(4/5*0.05 + 1/5* 0.09)} = 0.6897$$

Resuelva

2.29 Suponga que el 5% de las personas que hacen su declaración de impuestos reclaman ciertas deducciones sabiendo que son ilegales, otro 2% reclama esas deducciones debido a su falta de conocimiento de las leyes de impuestos. Del 5 % culpable de fraude, el 80% afirma desconocer el error si es sometido a una investigación. Si una persona al ser sometida a una investigación afirma desconocer el error. ¿Cuál es la probabilidad de que sea culpable de fraude? R: 2/3

****

Al finalizar este capítulo, se recomienda al lector que vuelva a la historia inicial e identifique completamente los conceptos teóricos que están relacionados con la presentación, aclarando algunas ideas que lo hubieran desorientado en su primera lectura.

16. Problemas Resueltos

2.30 Un fabricante tiene cinco terminales de computadoras aparentemente idénticas, él sabe que dos de las cinco son defectuosas. Recibe un pedido de dos terminales y lo surte seleccionado dos de las cinco al azar.

El espacio muestral del experimento, S, está formado por los elementos:
S= { D_1D_2, D_1B_1, D_1B_2, D_1B_3, D_2B_1, D_2B_2, D_2B_3, B_1B_2, B_1B_3, $B_2 B_3$}
Sea A el evento: surte con dos terminales no defectuosas.
Los elementos de A son:
A = {B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3}

Sea B el evento: surte con al menos una defectuosa.
Los elementos de B son:
B= {D_1D_2, D_1B_1 D_1B_2, D_1B_3, D_2B_1, D_2B_2, D_2B_3}

Sea C el evento: surte con dos defectuosas. C = {D_1D_2}

2.31 Considere el problema de seleccionar dos aspirantes de un grupo de cinco para un empleo e imagine que los aspirantes difieren en su grado de preparación: 1 es mejor que 2 y así para 3, 4, 5. Si el jefe de personal no sabe nada de esta clasificación, determine los eventos:

A: Seleccionar al mejor y uno de los dos peores aspirantes.
B: Seleccionar al menos uno de los dos mejores aspirantes.

S = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4) (3,5), (4,5) }
A = { (1,4),(1,5) }
B = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5) }

2.32 Se lanza una moneda y un dado, encuentre el espacio muestral.

S = { (C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (E,1), (E,2), (E,3), (E,4), (E,5), (E,6) }

Sea A el evento: salga cara y el número par.
A= {(C, 2), (C, 4), (C, 6)}

Sea B el evento: salga un número primo.
B = {(C,2), (C,3), (C,5), (E,2), (E,3), (E,5)}

Sea C el evento: salga escudo y el número impar.
C = { (E,1), (E,3), (E,5)}
Encuentre:
AUB = { (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (E,2), (E,3), (E,5) }
$A \cap C$ = Vacío
$B \cap C$ = {(E,3), (E,5) }
Solo B = $B \cap A^c \cap C^c$ = { (C,3), (C,5), (E,2) }
A^c = { (C,1), (C,3), (C,5), (E,1), (E,2), (E,3), (E,4), (E,5), (E,6) }
C^c = { (C,1), (C,2), (C,3), (C,4), (C,5), (C,6), (E,2), (E,4), (E,6) }

2.33 Se arregla un dado de manera que los números pares tengan el doble de probabilidad de salir que los impares. Calcule la probabilidad de los sucesos siguientes:

A: Aparezca un número par.
B: Aparezca un número mayor que cuatro.
C: Aparezca un número mayor que tres y par.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
P (1) = P (3) = P (5) = p
P (2) = P (4) = P (6) = 2p
P(S) = 3p + 6p = 1, entonces p = 1/9
P (A) = 6/9
P (B) = 1/9 + 2/9 = 3/9
P (C) = 4/9

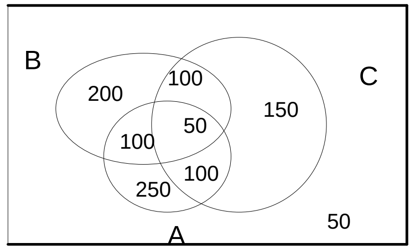
2.34 Cierta población de 1000 adultos presenta tres características: A, ser casado, B, tener un grado de educación superior y C, ser originario de la capital.

Según las cifras indicadas en el diagrama encuentre la probabilidad de que un individuo,

a. Sea casado (E).

b. Esté casado y tenga un grado de educación superior (F).

c. No sea originario de la capital pero si casado y tenga un grado de educación superior (G).



P (E) =500/ 1000

P (F)= 150/1000

P (G)=100/1000

2.35 Suponga que 5 personas estacionan su auto en la misma calle cada día. ¿Cuántos cambios pueden hacerse con los cinco autos?

$$_5P_5 = 5\,! = 120$$

¿Cuál es la probabilidad que un auto específico esté estacionado en el segundo lugar?

Uno está en un lugar determinado, el segundo, solo falta ordenar al azar 4 autos, en número de formas de hacerlo es:

$$_4P_4 = 4! = 24$$

A = un auto específico esté estacionado en segundo lugar

$$P(A) = 24/120 = 1/5$$

2.36 Si 10 alumnos de cierta escuela desean jugar baloncesto ¿cuántos equipos diferentes pueden formarse si no se consideran las posiciones de juego?

n= 10 alumnos r= 5 integrantes del equipo

Los equipos que pueden formarse son:

$$_{10}C_5 = 252$$

Si uno de los muchachos se llama José ¿cuántos equipos pueden formarse que incluyan a José?

Un integrante está especificado, falta seleccionar 9

n= 9 r = 4

Los equipos que pueden formarse e incluyen a José son:

$$_9C_4 = 126$$

Si A es el evento: el equipo incluye a José, P(A) = 126 / 252

2.37 Si se tiene un lote de 50 artículos y se sabe que 5 de estos son defectuosos, si se extraen 4 al azar y sin sustitución ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosos?

El número de combinaciones que forman el espacio muestral:

$$_{50}C_4 = 230300$$

El número de formas en que se pueden seleccionar dos defectuosos:

$$_5C_2 * {}_{45}C_2 = 9900$$

P (2 defectuosos) = $({}_5C_2 * {}_{45}C_2) / {}_{50}C_4$ = 10* 990 / 230300 = 0.4298

2.38 En una empresa, cuya población es de 100 individuos, se seleccionan al azar 2 persona para asistir a una convención. ¿Cuál es la probabilidad de que el más antiguo de los empleados sea el elegido?

El espacio muestral S está formado por:

$$_{100}C_2 = 4950 \text{ elementos.}$$

El suceso A, el más antiguo de los empleados es elegido, está formado por:

1* $_{99}C_1$ = 99 elementos

$$P(A) = 99/ 4950$$

2.39 Se desea alinear 8 bolas negras y 2 rojas

¿Cuál es la probabilidad de que las rojas queden juntas?

¿Cuál es la probabilidad de que las rojas ocupen posiciones extremas?

Número de elementos de S: $_{10}P_{8\,,\,2} = 45$

El número de elementos del suceso A (las rojas queden juntas):

$$_9P_{1,\,8} = 9$$

$$P(A) = 9/45 = 1/5$$

El número de elementos del suceso B (las rojas ocupen posiciones extremas):

$$_8P_{8,0} = 1$$

$$P(B) = 1/45$$

2.40. De Guatemala a Escuintla hay 3 caminos posibles, de Escuintla al Puerto de San José hay 2 caminos posibles.

a. ¿De cuántas formas puede llegar una persona al puerto partiendo de Guatemala y pasando por Escuintla?

De 3*2 = 6 formas

b. ¿De cuántas formas puede hacer un viaje redondo sin pasar por el mismo camino más de una vez?

De 3*2*1*2 = 12 formas

c. Calcular la probabilidad de que se haga un viaje redondo sin pasar por el mismo camino más de una vez si se selecciona cada punto al azar.

El espacio muestal S (recorridos como se puede hacer un viaje redondo) está formado por 3*2*2*3 = 36 elementos

De acuerdo al inciso b existen 12 formas como se puede hacer un viaje redondo sin pasar por el mismo camino más de una vez,

$$P(A) = 12/36 = 0.333$$

2.41 De 6 números positivos y 8 negativos se eligen 4 sin sustitución y se multiplican.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo?

El producto es positivo si: todos son positivos o todos son negativos o 2 son positivos o 2 negativos.

El espacio muestral S está formado por ${}_{14}C_4 = 1001$ elementos

El número de elementos del suceso A, el producto es positivo, se calcula:

$${}_6C_4\,{}_8C_0 + {}_6C_0\,{}_8C_4 + {}_6C_2\,{}_8C_2 = 505$$

$$P(A)= 505 / 1001$$

b. Si se seleccionan los números con sustitución, ¿cuál es la probabilidad que el producto sea positivo?

Elementos del espacio muestral S = 14^4 = 38416

Elementos de A = 6*6*6*6 + 8*8*8*8 + 8*8*6*6*${}_4C_2$ =

1296 + 4096 + 13824 = 19216

P(A) = 19216/ 38416 = 0.5

2.42 Un concejo de una ciudad tiene 8 miembros de los cuales 2 son contratistas locales, si se seleccionan dos concejales al azar para llenar las vacantes en el comité de demarcación de zonas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos contratistas sean seleccionados?

Sea A el suceso, el primer seleccionado es un contratista local.

Sea B el suceso, el segundo seleccionado es un contratista local.

$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) = 2/8 * 1/7 = 2/56 = 1/28$

Una forma alternativa es aplicar combinaciones.

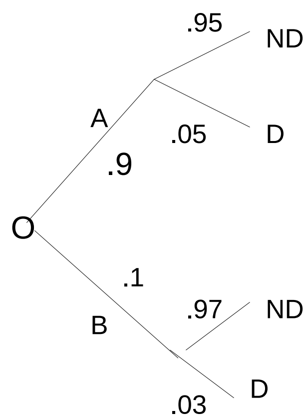
$P(A \cap B) = ({}_2C_2 * {}_6C_0) / {}_8C_2$

2.43 De acuerdo con una encuesta, la probabilidad de que una familia posea dos automóviles si sus ingresos son mayores a Q48000 al año es 0.75. De las familias entrevistadas 60% tenían ingresos mayores de Q48000 y el 52% tenían 2 autos.
Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 2 autos y sus ingresos sean superiores a Q48000

A: Ingresos superiores a Q48000
B: tiene dos autos
P(B/A) = 0.75
P(A) = 0.6
P(B)= 0.52
$P(A \cap B) = P(A) P(B/A) = 0.6 * 0.75 = 0.45$

2.44 Una compañía dedicada al montaje de ventiladores usa motores de dos proveedores, la compañía A proporciona el 90% de los motores y la compañía B el otro 10%; se sabe que el 5 % de los de A no cumplen con las especificaciones y el 3% de los de B no cumplen con las especificaciones. Si se encuentra que un ventilador que ha sido probado y tiene un motor defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya proporcionado por la compañía B?

P (A) = 0.90
P (B) = 0.10
P (D/A) = 0.05
P (D/B) = 0.03
P (D) = 0.9 *0.05 + 0.1* 0.03 = 0.045+ 0.003 =0.048
P (B/ D) = (0.1 *0.03) / 0.048 = 0.0625



2.45 Un sistema para detectar humo utiliza dos dispositivos A y B, si hay humo, la probabilidad de detectarlo por A es 0.95 y por B es 0.90. Ambos dispositivos operan en forma independiente. Si hay humo, encuentre la probabilidad de que sea detectado por uno de los dos componentes.

P(AUB) = 0.95 * 0.02 + 0.98 * 0.05 = 0.068

Probabilidad de no detectarlo $P(\{AUB\}^c) = 1 - 0.999 = 0.001$

2.46 Dos paquetes, de 6 pilas, contienen exactamente dos pilas defectuosas cada uno, si se seleccionan dos pilas de cada paquete, ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro pilas estén en buenas condiciones?

Sea A el suceso: las cuatro pilas están en buenas condiciones:

$$P(A) = [{}_4C_2\,{}_2C_0 / {}_6C_2] * [{}_4C_2\,{}_2C_0 / {}_6C_2] = (6/15)^2 = 0.16$$

2.47 Tres equipos A, B y C se inscriben en un torneo, en el que cada equipo juega dos juegos, uno contra cada oponente, el ganador, si lo hay, es el que gana 2 encuentros, suponga que no puede haber empates y las siguientes probabilidades:

P (A gana a B) = 0.7
P (B gana a C) = 0.8
P (C gana a A) = 0.9
Entonces,
P (B gana a A) = 0.3
P (C gana a B) = 0.2
P (A gana a C) = 0.1

¿Cuál es la probabilidad de que A gane el torneo?

P (A gana a B y a C) = 0.7 * 0.1 = 0.07

¿Cuál es la probabilidad que haya un ganador?

Hay ganador si: A gana a B y C o B gana a A y C o C gana a B y A

P(un ganador) = 0.7* 0.1 + 0.8*0.3 + 0.9*0.2 = 0.49

La probabilidad de que no haya ganador 1- 0.49 = 0.51

2.48 Cinco líneas de producción en una operación de manufactura producen un fusible electrónico que se envía a los distribuidores en lotes de 100 unidades, la mayoría de compradores prueban solamente un pequeño número de fusibles antes de aceptar o rechazar el lote. Las 5 líneas producen a la misma velocidad y normalmente producen el 2 % de defectuosos, desafortunadamente la línea 1 sufrió una falla mecánica y produjo 5 % defectuosos en el mes pasado, el productor se enteró de esto después de haber enviado los fusibles a un cliente que probó 2 fusibles y uno era defectuoso.

¿Cuál es la probabilidad de que el lote haya salido de la línea uno? ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de las otras líneas?

Para las líneas 2, 3, 4, 5 la probabilidad de defectuoso es 0.02, para la línea 1 la probabilidad de defectuosos es 0.05.
La probabilidad de que el lote salga de cada una de las líneas es 0.2

De la línea 1,

La probabilidad de cero fusibles defectuosos es:

0.95*0.95= 0.9025,

La probabilidad de un fusible defectuoso es:

0.95*0.05 *2= 0.095

La probabilidad de dos fusibles defectuosos es

0.05*0.05= 0.0025

De cualquiera de las otras líneas,

La probabilidad de cero fusibles defectuosos es:

0.98*0.98= 0.9604,

La probabilidad de un fusible defectuoso es:

0.98*0.02*2 = 0.0392

La de dos fusibles defectuosos es:

0.02*0.02= 0.0004

Probabilidad de que la muestra tenga un fusible defectuoso, es la probabilidad del suceso: la producción se hizo en la línea 1 y la muestra presentó un fusible defectuoso o la producción se hizo en las otras líneas y la muestra presentó un fusible defectuoso.
La probabilidad de este suceso es: 0.2* 0.095 + 0.8* 0.0392 = 0.05036

P(Línea 1 / uno de la muestra es defectuoso) =

0.2*0.095 / 0.05036 = 0.37728

P(otras líneas / uno de la muestra es defectuoso) =

1 - 0.37728 = 0.6226

2.49 Un voceador vende periódicos en una calle, todos los días tiene 30 periódicos sin saber cuantos venderá en determinado día.

a. Defina el espacio muestral del experimento que consiste en contar el número de ventas que hará en un día determinado.

S = {0, 1, 2, 3, 4, 5,....20,.......30}

b. Especifique los sucesos A, vende al menos 5 periódicos; B, vende cuando mucho 5 y C, vende exactamente 5

A = {5, 6, 7, 8,......30}
B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

C = {5}

c. Indique si los sucesos anteriores son o no excluyentes

A y B no son excluyentes, A y C no son excluyentes, A, B y C no son excluyentes.

2.50 La señora Flores compra una casa de las anunciadas para la venta en el diario. Sea T el evento la casa tiene 3 o más dormitorios, sea U el evento tiene chimenea, V el evento cuesta más de 160 mil dólares y W el evento es nueva. Describa cada uno de los siguientes eventos:

a. T^c: Tiene menos de tres dormitorios

b. W^c: no es nueva

c. $U^c \cap V$:No tiene chimenea y cuesta más de 160 mil dólares

d. $T \cap V$: tiene al menos tres dormitorios y cuesta más de 160 mil dólares

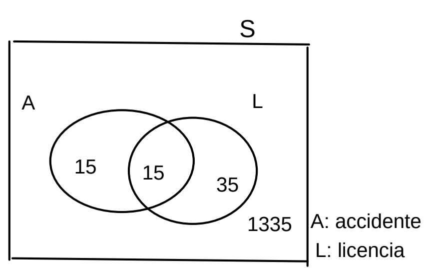
2.51 En un grupo de 1400 empleados, 30 han tenido accidentes, de estos, 15 faltaron uno o más días a sus labores, además se sabe que de los 1400 empleados 50 tiene licencia de uno o más días por motivos de salud (accidente o enfermedad), estime la probabilidad de los sucesos:

A: Un empleado seleccionado al azar ha tenido un accidente o falta por motivo de salud.

B: Que el empleado seleccionado esté ausente por razones no relativas a un accidente.

C: Que un trabajador no haya tenido accidente.

De acuerdo con el diagrama:



P(A) = (15+15+35) / 1400 = 65/1400 = 0.0464

Aplicando el teorema de probabilidad de la unión

$P(A) = (30 + 50 - 15) / 1400 = 0.0464$

De acuerdo con el diagrama

$P(B) = 35 / 1400$

$P(C) = (1335 + 35) / 1400 = 1370 / 1400 = 0.9787$

2.52 Cuatro trabajadores Juan, Pedro Raúl y David son contratados por una compañía manufacturera, los trabajadores serán asignados aleatoriamente ya sea al departamento de embarque o al de recepción. ¿Cuál es la probabilidad del evento: Pedro y David son asignados al mismo departamento?
El espacio muestral S está formado por 2x2x2x2 = 16 elementos
A, es el suceso Pedro y David son asignados a recepción o son asignados a embarque.

El número de elementos del suceso: son asignados a embarque

1x1x2x2 = 4

Y el número de elementos del suceso: son asignados a recepción

1x1x2x2 = 4

P(A) = P(son asignados a embarque) + P(son asignados a recepción)
Por lo que

$P(A) = 4/16 + 4/16 = 8/16$

2.53 Quince autos participan en una carrera, se considera que todos los pilotos tienen la misma habilidad.

a. ¿De cuentas formas pueden repartirse los premios, primero, segundo y tercero?

${}_{15}P_{3} = 2730$ formas

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el auto #15 forme parte del trío ganador?

A = el auto #15 llega en uno de los tres primeros lugares

El número de elementos de A se calcula: $3 * {}_{14}P_{2} = 3 * 182 = 546$

$P(A) = 546/ 2730 = 0.2$

2.54 Diez fichas numeradas de 1 a 10 se mezclan en una caja, si se seleccionan dos fichas al azar sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea 10?

El número total de posibles parejas es ${}_{10}C_2 = 45$
Las parejas del suceso A, la suma es 10, son : (1,9), (2,8), (3,7), (6,4)

$P(A) = 4 / 45$

Observe que no importa el orden de la selección para que la suma sea diez.

2.55 ¿Cuál es la probabilidad que al permutar las letras de la palabra TOTAL las 2 T queden juntas?

n_1 = 2 letras T
n_2= 1 Letra O
n_3 = 1 letra A
n_4 = 1 letra L

Los elementos del espacio muestral S son: ${}_5 P_{2, 1, 1, 1}= 60$

Sea A el evento: las T quedan juntas.

El número de elementos del evento A se calcula:

${}_4P_{1,1,1,1} = 4\,! = 24$ por lo que $P(A) = 24/60$

¿Cuál es la probabilidad que la O ocupe el primer lugar?

Sea B el suceso, la O en primer lugar.

El número de elementos de B se calculan de la forma siguiente:

$1 * {}_4P_{2,1,1} = 12$

$P(B) = 12/60$

2.56 El precio de un recorrido turístico por Europa incluye cuatro sitios de visita que deben seleccionarse entre 10 ciudades, ¿de cuantas formas se puede planear el recorrido.

a. Si importa el orden de la visita: ${}_{10}P_4 = 5040$
b. Si no importa el orden de la visita : ${}_{10}C_4 = 210$

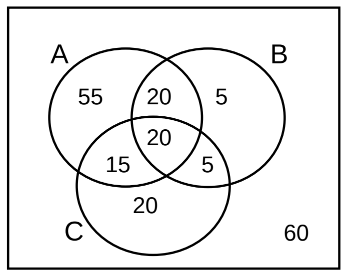
2.57 Un grupo de 200 propietarios de aparatos electrodomésticos tiene la siguiente distribución de máquinas:

Suceso	Descripción	Frecuencia
A	Lavadoras	110
B	Secadoras	50
C	Lavaplatos	60

A y B	Lavadoras y secadoras	40
A y C	Lavadoras y lavaplatos	35
C y B	Lavaplatos y secadoras	25
A y B y C	Lavadoras lavaplatos y secadoras	20

Estime la probabilidad de que un propietario seleccionado al azar tenga:

I. Lavadora y/o secadora y/o lavaplatos
II: Solo lavadora
III. Quien tenga una lavadora, tenga también lo otros aparatos



I. P (AUBUC) = (55+20+20+15+5+5+20) / 200 = 0.7
Aplicando el teorema de la Unión.
P (AUBUC) = (110+50+60-40-25-35+20) / 200 = 140/200 = 0.7

II: P (solo A) = $P(A \cap (B \cup C)^c) = 55/200 = 0.275$

III: $P((B \cap C) / A) = 20 / 110 = 0.1818$

2.58 Se lanzan tres monedas legales

a. ¿Cuál es la probabilidad que todas sean caras, dado que la primera es cara?

b. ¿Cuál es la probabilidad, que todas sean caras si por lo menos una es cara?

El espacio Muestral del Experimento es:
S = {CCC, TCC, CTC, CCT, TTC, TCT, CTT, TTT }

a. El espacio muestral reducido por el suceso, la primera es cara es:
S’ = CCC, CTC, CCT, CTT
P(A) = P (Todas sean caras / la primera es cara)= 1/4
Otra forma:
P(A) = P(Todas caras) / P(la primera cara)=(1/ 8) / (4/8) = 1 /4

b. El espacio muestral reducido por el suceso por lo menos una cara es:

S’’= CCC, TCC, CTC, CCT, TTC, TCT
P(B) = P(todas sean caras / por lo menos una es cara) = 1/7
Otra forma:
P(B) = P(Todas caras) / P(por lo menos una es cara)
P(B) = (1/8) / (7/8) = 1/7

2.59 Una caja contiene 2 bolas negras, 3 blancas y 4 rojas, si se extraen dos bolas sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad,

a. de obtener una negra y una blanca sin importar el orden?

$P(A) = {}_2C_1 * {}_3C_1 * {}_4C_0 / {}_9C_2 = 0.16666$

b. de obtener una negra y una blanca, sin importar el orden y suponiendo que se extraen una a una ?
P(N) P(B/N) + P/B) P(N/B) = 2/9 *3/8 + 3/9 * 2/8 = 1/6

2.60 En una fábrica de pernos, las máquinas A, B, C fabrican 25, 35 y 40 % de la producción total, de esta producción, el 5, 4, 2 % es defectuosos, respectivamente para cada máquina.
Si se escoge de la producción total del día un perno al azar ¿cuál es la probabilidad de que este cumpla con las especificaciones?

B_i = Producción hecha por la máquina i i= 1,2,3
D = el perno no cumple con las especificaciones
$P(B_1)= 0.25$
$P(B_2) = 0.35$
$P(B_3)= 0.4$
$P(D/B_1) = 0.05$
$P(D/B_2) = 0.04$
$P(D/B_3) = 0.02$
$P(D^c) = 0.25*0.95 + 0.35*0.96 + 0.4 * 0.98= 0.965$

2.61 La probabilidad que A de en el blanco es 0.25 y de que B de en el blanco es 0.333. Si cada uno dispara dos veces, primero A y luego B,
a. ¿cuál es la probabilidad que el blanco sea alcanzado una vez por lo menos (E)?
$P(E) = 1- P(E^c)$ = 1- P(el blanco es alcanzado ninguna vez)
1- (0.75 * 0.75 * 0.667 * 0.667) = 3/4

b. Si cada uno dispara una vez y el blanco es alcanzado solamente una vez. ¿Cuál es la probabilidad de que sea A el que dé en el blanco?

F = el blanco es alcanzado solo una vez
G = A da en el blanco
$F \cap G$ = A da en el blanco y solo una vez es alcanzado
P(F) = 0.25* 0.667 + 0.333* 0.75 = 5/12
P($F \cap G$) = 0.25 * 0.667 = 2/12
P(G / F) = (2/12) / (5/12) = 2/5

c. Si A puede disparar solo dos veces. ¿Cuántas veces debe disparar B para que haya por lo menos un 90% de probabilidad de que el blanco sea alcanzado una vez por lo menos?

P(por lo menos una vez en el blanco) = 1- P (ninguna vez en el banco)
P(ninguna vez en el banco) $\leq$ 0.10 = $3/4 * 3/4 * (2/3)^n$
ln (0.1 *16 / 9) = n ln (2/3)
n = (ln 0.1 + 16 / 9) /(ln (2/3)) = 4.259
B debe tirar 5 veces

2.62 En la fabricación de cierto artículo, se encuentran presentes un tipo de defecto I con probabilidad 0.1 y un tipo de defecto II con probabilidad 0.05.

Si se supone independencia entre los dos tipos de defectos, ¿cuál es la probabilidad que un artículo seleccionado al azar,

a. sea bueno o con una clase de defectos?
b. sea defectuoso?
c. suponiendo que sea defectuosos, que tenga solo un tipo de defecto?

P(I) =0.1 P(II)= 0.05 P($I \cap II$) = 0.05 * 0.1 = 0.005

El artículo puede ser: Bueno, Solo con defecto tipo I, Solo con defecto tipo II, Ambos defectos.

P(A) = P (sea bueno o con una clase defectos) = 1- P(ambos defectos)
P(A) = 1- 0.005 = 0.995

P (B) = P (defectuoso) = P(I U II) = 0.1 + 0.05 - 0.005 = 0.145

P(C) = P (solo un tipo de defecto / defectuoso) =
(0.095 + 0.045) / 0.145= 0.9655

2.63 Suponga que se tiene 2 urnas, cada una con dos cajones, la urna I tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la II tiene una moneda de oro en cada cajón. Si se selecciona una urna al azar y de esta un cajón al azar, si la moneda es de oro ¿cuál es la probabilidad que provenga de la urna II?

P(I) = 0.5 P(O/I) = 0.5 P(P/I)= 0.5 P(II) = 0.5 P(O/II) = 1
P(II/O) = (0.5* 1) /(0.5 *1 + 0.5* 0.5) = 2/3

2.64 Considere el experimento aleatorio de lanzar dos dados normales una sola vez y los siguientes sucesos:

A: El primero muestra un número impar
B: El segundo muestra el 3 o el 4
Determine si son Independientes

El espacio muestral para cada uno de los dados es S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

P(A) = 1/2
P(B) = 1/3

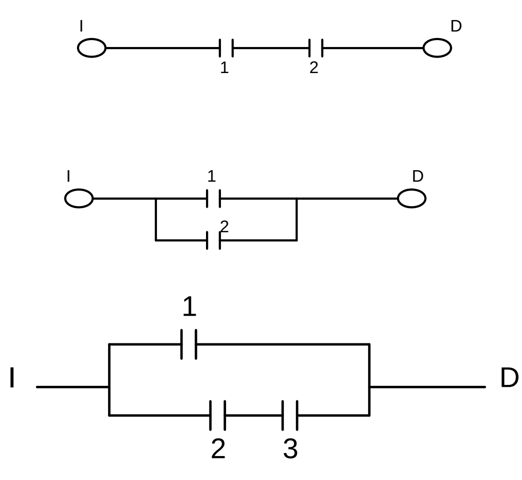
Si los sucesos fueran independientes $P(A \cap B) = 1/2 * 1/3 = 1/6$

Comprobando:

El espacio muestral para el experimento está formado por 6*6 = 36 parejas
Las parejas que forman el suceso (A y B), el primero muestra un número impar y el segundo muestra el 3 o el 4, son {(1,3) , (1,4) , (3,3) , (3,4), (5,3), (5,4) }, esto es, 3*2= 6

$P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$
A y B son sucesos independientes.

2.65 Encuentre la probabilidad de que pase la corriente por cada uno de los circuitos mostrados en la figura, si la probabilidad de que cada relé este cerrado es p.



pi = probabilidad de que pase corriente en i , además es la misma para cada relé (p)

a. $P(1 \cap 2) = p_1 * p_2 = p^2$

b. $P(1 \cup 2) = p + p - p^2 = 2p - p^2$

c. $P(1 \cup (2 \cap 3) = P(1) + P(2 \cap 3) - P(1 \cap 2 \cap 3) =$
$p_1 + p_2 * p_3 - p_1 * p_2 * p_3 = p + p^2 - p^3$

17. Problemas propuestos

2.66 Entre 64 médicos de un hospital 58 tienen seguro contra prácticas negligentes, 33 son cirujanos y 31 de los cirujanos tienen seguro contra prácticas negligentes. Si se selecciona un médico al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el elegido no sea cirujano y no tenga seguro contra prácticas negligentes? R: 4/64

2.67 Si se toman dos cartas de una pila desordenada de 52 cartas en juego. ¿Cuáles son las probabilidades de sacar:

a. Dos diamantes?
b. Dos Ases?
c. Una rey y una reina en ese orden?
R: 0.0588, 0.00452, 0.00603

2.68 Dadas P (K) = 0.45, P(L) = 0.27 y $P(K \cap L) = 0.13$ determine las probabilidades asociadas a:

$P(K \cup L)$, $P(K^c \cup L)$ y $P(K^c \cup L^c)$
R: 0.59, 0.68, 0.87

2.69 En la tabla siguiente se muestra la clasificación de 60 alumnos según el grado que cursan y de acuerdo a su ingrediente de pizza favorito.

	Anchoas	Cebolla	Champiñones	Picadillo
Primer Año	7	6	7	3
Segundo Año	1	9	0	9
Tercer Año	3	2	5	8

Determine la probabilidad que al elegir un estudiante sea:

a. Alumno de primer año cuyo remate de pizza favorito sean los champiñones.
b. Un fanático de la pizza de anchoas dado que es un alumno de tercer año.
c. Un alumno de segundo año dado que no es un alumno de tercer año.

R: 7/60, 3/18, 19/42

2.70 La probabilidad de que una rara enfermedad tropical se diagnostique correctamente es 0.7. Si esta se diagnostica correctamente la probabilidad de que el paciente sanará es 0.9, si no la probabilidad es 0.4 de que el paciente sanará. Si sana un paciente que tiene la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se le diagnosticó correctamente? R: 0.84

2.71 Si la probabilidad es 0.26 de que una mujer diga que el amarillo es su color favorito. ¿Cuál es la probabilidad de que de cuatro mujeres seleccionadas al azar todas digan que el amarillo es su color predilecto? R:0.00457

2.72 En una lotería A hay 10 boletos; de ellos uno gana y es seleccionado al azar. En la lotería B hay 20 boletos, de ellos dos ganan y se seleccionan al azar. ¿En cuál lotería tenemos más probabilidades de ganar al menos una vez si compramos dos boletos? R. En la lotería A.

2.73 Un turista desea hacer una pequeña fogata en el bosque, pero solo hay dos cerillos. Él puede elegir uno de dos métodos para prender la leña: el primero consiste en encender un cerillo y luego el otro si hace falta; el segundo es prender juntos los cerillos. ¿Cuál de los dos métodos es más aconsejable si se sabe que la probabilidad de que se prenda la fogata con un solo cerillo es 0.55 y de que se encienda con los dos cerrillos juntos es 0.9? R: es más probable que se encienda con los dos cerillos juntos.

2.74 En una encuesta de satisfacción al cliente 3/5 de los sujetos sometidos a interrogatorio tenían un automóvil japonés, 1/10 uno europeo y 3/10 uno estadounidense. Del primer grupo, 85% respondió que compraría la misma marca otra vez, en tanto que para los otros dos grupos los porcentajes correspondientes son de 50 y 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que compra un automóvil de la misma marca de nuevo, tuviera uno japonés? R: 51/68

2.75 Se extrae una carta de una baraja ordinaria, sea A el evento “se obtiene un as” y B el evento “se obtiene un diamante”. Son independientes los pares de eventos: A y B, A^c y B, A y B^c, A^c y B^c. R: si

CAPÍTULO 3

VARIABLES ALEATORIAS

HISTORIA DE UN VENDEDOR DE PERIÓDICOS

Moncho compra periódicos a Q0.50 cada uno y los vende a Q1.00, ahora bien, cuando le quedan ejemplares sin vender los entrega al mayorista al día siguiente que se los paga a Q0.20 cada uno. Para Moncho, los días de buena suerte son imprevisibles y frecuentemente no tiene al menos la posibilidad de llegar a cubrir sus gastos. Sin embargo, un poco de análisis estadístico puede ayudarlo a minimizar las pérdidas.

Un día decide hacer un balance de su actividad y reflexiona de la siguiente manera:

Jamás había llegado a vender el mismo día 50 periódicos.

Preparó el siguiente cuadro que corresponde a las posibles ganancias, haciendo figurar sus compras y sus ventas mediante juegos de 10 periódicos, calculando la ganancia de la siguiente forma: 1.00 X - 0.5Y + (Y-X) 0.2, donde X son las ventas o demanda, Y son las compras u oferta, (Y-X) los periódicos que no vende, por día.

	DEMANDA					
OFERTA	0	10	20	30	40	50

0	0	0	0	0	0	0
10	-3	5	5	5	5	5
20	-6	2	10	10	10	10
30	-9	-1	7	15	15	15
40	-12	-4	4	12	20	20
50	-15	-7	1	9	17	25

Moncho se quedó perplejo al consultar el cuadro, comprando 50 periódicos puede ganar Q25 pero arriesga perder Q15, comprando 20 puede ganar Q10 pero no arriesga perder más de Q6.

Lo importante no es lo que se gana en un día, sino lo que se gana en un mes, dos meses o más. ¿Será posible prever lo que puede ganar en un año si compra todos los días la misma cantidad de periódicos? ¿Cuál debería ser esa cantidad para obtener la máxima ganancia? ¿Cómo puede conocer el comportamiento de los clientes para determinar cuántos periódicos puede poner a la venta?

Evidentemente la venta estaba influenciada por sucesos políticos o extraordinarios, sin embargo la mayoría de los días mostraban un comportamiento semejante, y suponiendo que el futuro se parece al pasado, hoy iniciaría una serie de observaciones, 100 exactamente, que le facilitarían contestar las preguntas anteriores y predecir el comportamiento futuro.

Un estudiante de Estadística, amigo de Moncho, le ofreció su colaboración. El estudiante deseaba encontrar una fórmula que pudiera ser utilizada para calcular la ganancia esperada por Moncho.

Así fue como un día, analizando las notas que Moncho había tomado y que se muestran en la tabla, a partir de la frecuencia de las ventas y la frecuencia relativa acumulada pudo muy fácilmente calcular esta ganancia.

El análisis fue el siguiente:

Si el futuro se presenta con la misma frecuencia que la mostrada por el pasado, se tienen 12 posibilidades sobre 100 de vender cuando más 10 periódicos, $P(X \leq 10)$, 44 posibilidades sobre 100 de vender cuando más 21 $P(X \leq 21)$ .... Esta relación se llama probabilidad acumulada de la demanda, $F(X)$, donde X es la Variable Demanda.

La ganancia marginal se puede encontrar mediante un razonamiento muy sencillo y así se puede conocer cuántos periódicos se tendrá que comprar sistemáticamente por día durante los próximos 100 días, siempre y cuando el futuro tenga la misma distribución que el pasado.

Suponga que siempre compra (S-1) periódicos ¿Qué pasará si decide comprar uno más? Ganaría Q0.5 con probabilidad 1-F(S-1), la cual es la probabilidad de una demanda superior a (S1), P (X > (S - 1)), y perdería Q0.3 con probabilidad F(S-1) que es la probabilidad de que la demanda sea cuando más igual a (S-1) , P(X≤ (S-1)), la ganancia suplementaria esperada sería:

$$Q0.5\ (1- F(S-1)) \ - Q\ 0.3 \ \ F(S-1) = Q\ 0.5 - Q\ 0.8\ F(S-1)$$

Es pues interesante compra un periódico más siempre que la ganancia suplementaria sea mayor que cero;

$$0.5 -0.8\ F(S-1) > 0, \quad \text{o sea} \quad F(S-1) < 0.5/0.8$$

$$F(S-1) < 0.625$$

Registros de la demanda de periódicos

Demanda	Frecuencia observada	Acumulada relativa	Demanda	Frecuencia observada	Acumulada relativa
0	0	.0	26	4	.64
1	0	.0	27	3	.67
2	1	.01	28	3	.70
3	1	.02	29	4	.74
4	1	.03	30	2	.76
5	2	.05	31	3	.79
6	1	.06	32	3	.82
7	1	.07	33	2	.84
8	1	.08	34	2	.86
9	2	.10	35	3	.88
10	2	.12	36	1	.89
11	1	.13	37	2	.91
12	3	.16	38	2	.93
13	1	.17	39	1	.94
14	3	.20	40	2	.96
15	3	.23	41	0	.96
16	3	.26	42	1	.97
17	4	.30	43	1	.98
18	3	.33	44	0	.98
19	4	.37	45	0	.98
20	3	.40	46	1	.99
21	4	.44	47	0	.99
22	5	.49	48	0	.99
23	4	.53	49	1	1.00
24	4	.57	50	0	1.00

25	3	.60	>50	0	1.00

Pero hay que detenerse para un valor de S tal que:

$$F(S-1) \geq 0.625$$

Es decir tomar una S tal que $P(S-1) < 0.625 < P(S)$

Consultando la tabla si S = 26, P(S-1) = 0.6 y P(S)= 0.64 La existencia óptima de periódicos que hay que tener es 26.

La ganancia media o esperada que corresponderá al valor de S= 26, debe ser calculada tomando en cuenta todos los supuestos con su probabilidad asociada:

ÁLCULOS PARA GANANCIAS ESPERADAS

demanda	probabilidad	factor	ganancia	esperado	ganancia2	esperado2	ganancia1	esperado1
		0.8X	26 periodicos		27periodicos		25 periodicos	
0	0	0	-7.8	0	-8.1	0	-7.5	0
1	0	0.8	-7	0	-7.3	0	-6.7	0
2	0.01	1.6	-6.2	-0.062	-6.5	-0.065	-5.9	-0.059
3	0.01	2.4	-5.4	-0.054	-5.7	-0.057	-5.1	-0.051
4	0.01	3.2	-4.6	-0.046	-4.9	-0.049	-4.3	-0.043
5	0.02	4	-3.8	-0.076	-4.1	-0.082	-3.5	-0.07
6	0.01	4.8	-3	-0.03	-3.3	-0.033	-2.7	-0.027
7	0.01	5.6	-2.2	-0.022	-2.5	-0.025	-1.9	-0.019
8	0.01	6.4	-1.4	-0.014	-1.7	-0.017	-1.1	-0.011
9	0.02	7.2	-0.6	-0.012	-0.9	-0.018	-0.3	-0.006
10	0.02	8	0.2	0.004	-0.1	-0.002	0.5	0.01
11	0.01	8.8	1	0.01	0.7	0.007	1.3	0.013
12	0.03	9.6	1.8	0.054	1.5	0.045	2.1	0.063
13	0.01	10.4	2.6	0.026	2.3	0.023	2.9	0.029
14	0.03	11.2	3.4	0.102	3.1	0.093	3.7	0.111
15	0.03	12	4.2	0.126	3.9	0.117	4.5	0.135
16	0.03	12.8	5	0.15	4.7	0.141	5.3	0.159
17	0.04	13.6	5.8	0.232	5.5	0.22	6.1	0.244
18	0.03	14.4	6.6	0.198	6.3	0.189	6.9	0.207
19	0.04	15.2	7.4	0.296	7.1	0.284	7.7	0.308
20	0.03	16	8.2	0.246	7.9	0.237	8.5	0.255
21	0.04	16.8	9	0.36	8.7	0.348	9.3	0.372
22	0.05	17.6	9.8	0.49	9.5	0.475	10.1	0.505
23	0.04	18.4	10.6	0.424	10.3	0.412	10.9	0.436
24	0.04	19.2	11.4	0.456	11.1	0.444	11.7	0.468
25	0.03	20	12.2	0.366	11.9	0.357	12.5	0.375
26	0.04	20.8	13	0.52	12.7	0.508	12.5	0.5
27	0.03	13	13	0.39	13.5	0.405	12.5	0.375
28	0.03	13	13	0.39	13.5	0.405	12.5	0.375
29	0.04	13	13	0.52	13.5	0.54	12.5	0.5
30	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
31	0.03	13	13	0.39	13.5	0.405	12.5	0.375
32	0.03	13	13	0.39	13.5	0.405	12.5	0.375
33	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
34	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
35	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
36	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
37	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
38	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
39	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
40	0.02	13	13	0.26	13.5	0.27	12.5	0.25
41	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
42	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
43	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
44	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
45	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
46	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
47	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
48	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
49	0.01	13	13	0.13	13.5	0.135	12.5	0.125
50	0	13	13	0	13.5	0	12.5	0
				8.424		8.412		8.404

Ganancia es igual a Q1*X - Q0.5 *26 + Q0.2 (26-X) cuando la demanda X toma un valor entre 0 y 26

De igual forma Ganancia es igual a Q1 *26 - Q0.5 *26, cuando la variable X toma un valor >26, la demanda es mayor que la oferta.

La Ganancia Esperada se calcula multiplicando la Ganancia (G) por su probabilidad P(G), que es la misma que la probabilidad de la demanda P(X).

$$E(G) = \sum_{i=0}^{50} G_i \, P(G_i)$$

En la tabla siguiente se presentan los cálculos y la ganancia esperada cuando S= 26 es 8.424 quetzales

En la misma tabla se calculan de igual manera la ganancia esperada para S= 27 y S= 25 se obtiene, Q 8.412 y Q 8.404 respectivamente.

Conclusión, comprando diariamente 26 periódicos se ganaría en promedio, el máximo, o sea Q8.42 por día. Sin embargo no hay que olvidar que se excluyen los días excepcionales, para eso días esta conclusión no sirve de nada.

****

1. Variables aleatorias

Al estudiar un fenómeno, o al observar una realidad, se llevan a cabo experimentos cuyos resultados están sujetos al azar. El término experimento estadístico se utiliza para describir cualquier proceso mediante el cual se generan varias observaciones al azar de la realidad.

Es de hacer notar que las observaciones generadas caen en una de dos categorías: Cuantitativas o Cualitativas, y que a estas últimas es importante asignarles una descripción numérica en función de alguna de sus características. Por ejemplo, si el experimentos consiste en lanzar dos monedas y observar sus resultados, las observaciones generadas por el experimento serán: ambas monedas mostraron cara, ambas mostraron escudo, la primera mostró cara y la segunda escudo o la primera mostró escudo y la segunda cara. Sin embargo el valor numérico lo podemos asignar de acuerdo al Número de Escudos que observamos en total: 0, 1 o 2.

Ahora, si el experimento consiste, en seleccionar una bombilla al azar de un lote fabricado, ponerla en funcionamiento y observar el tiempo de vida antes de la falla, las observaciones generadas serán 900 horas, 980 horas, 1000 horas o una infinidad de posibles valores.

En ambos casos el resultado final los registramos como un número.

2. Definición de variable aleatoria

El resultado observado de un experimento, está contenido en su espacio muestral, y una variable aleatoria es una función, una regla o una planteamiento, que permite asociar un número real con cada uno de los elementos del espacio muestral.

2.1 Variables Aleatorias Unidimensionales

Las variables unidimensionales se definen cuando se interesa observar solo una de las características del espacio muestral y se asigna, a cada elemento de éste, una función que asocia un número real.

Ejemplo:

3.1. Un funcionario de Salud Pública que tiene a su cargo 50 familias está interesado en estudiar el número de niños por familia, a la Variable Aleatoria X, unidimensional, se le define de esa forma, X= Número de niños por familia.

Si una familia en particular, familia Juárez, tiene 3 hijos, X toma para este caso, el valor de 3.

2.2 Variables Aleatorias Bidimensionales

Las variables bidimensionales se definen cuando el interés es observar dos características del mismo espacio muestral y se le asigna a cada elemento de éste dos funciones que le hacen corresponder una pareja de números reales.

Ejemplo:

3.2. Si el funcionario de Salud Pública está interesado en estudiar el número de niños por familia y la edad en años del jefe de familia, la variable bidimensional se describe como (X,Y) donde X = Número de niños por familia, Y= edad en años cumplidos del jefe de familia. Si la familia Juárez tiene 3 hijos y el jefe de familia tiene 26 años, la variable X toma el valor de 3 y la variable Y el valor de 26, El resultado de la variable bidimensional se escribe: (X=3, Y=26)

2.3 Variables Aleatorias n-dimensionales

Se denominan variables aleatorias n dimensionales al conjunto de X_1, X_2, X_3, X_i......... X_n donde cada X_i es una función que asigna a cada uno de los elementos del espacio muetral un número real, se presenta cuando se está interesado en estudiar n características del mismo simultáneamente.

3. Recorrido de la variable aleatoria

Si se considera que en el grupo de 50 familias, que tiene a su cargo el funcionario de Salud, algunas no tienen hijos y otras tienen hasta 6 hijos, al seleccionar una familia al azar, la Variable X puede tomar los valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; a este conjunto de resultados se le denomina recorrido de X (Rx).

Al conjunto de todos los posibles valores de una variable aleatoria se le llama rango o recorrido.

4. Clasificación de las Variables Aleatorias

De acuerdo a su recorrido las variables aleatorias se clasifican en: Discretas y Continuas

4.1 Variables aleatorias unidimensionales discretas

X es una variable aleatoria Discreta si su recorrido se identifica como un conjunto de valores numerable, finito o infinito.

$$Rx = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\dots\dots x_n \}$$

Ejemplo:

3.3. De un conjunto de personas se seleccionan 3 al azar y se clasifican de acuerdo a su género, masculino (M) o femenino (F):

El espacio muestral del experimento es,
S = { (M,M,M) (M,F,M) (M,M,F) (F,M,M) (F,F,M) (F,M,F) (M,F,F) (F,F,F)}

Si X es la variable "número de varones seleccionados", X puede tomar 4 valores, Rx ={ 0,1,2,3,}

Resuelva

3.4 En una caja hay 5 envases de agua gaseosa de los cuales 4 son Coca Cola y 1 es Pepsi Cola. Si se selecciona al azar 2 de ellos, sin sustitución y V representa el número de envases de Pepsi Cola seleccionados, encuentre el recorrido de la variable V

4.2 Distribución de Probabilidades de las Variables Aleatorias Unidimensionales Discretas

Si X es una variable aleatoria definida en el espacio muestral de un experimento aleatorio, se dice que X es discreta si su recorrido es un conjunto numerable (finito o infinito):

$$Rx = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\dots\dots x_n \}$$

y a cada uno de los posibles valores de X se le puede asociar un número real positivo $P(x_i)$, i = 1,2,3....n.... , que es llamado probabilidad (puntual) de x que representa una medida de la posibilidad de que la Variable Aleatoria tome el valor x_i, además satisface las siguientes condiciones:

$$0 \leq P(x_i) \leq 1$$

n

$$\sum_{i=1} P(x_i) = 1$$

Una fórmula, tabla o gráfica que muestra el recorrido de la variable aleatoria asociando sus probabilidades puntuales se denomina **distribución de probabilidades** de la Variable Aleatoria.

Así, si se lanza una moneda dos veces, el espacio muestral asociado al experimento es: S = { (c,c), (c,e), (e,c) , (e,e) }. Bajo el supuesto que se trata de un espacio equiprobable, cada uno de sus elementos tiene probabilidad igual a 0.25.

Sea X la variable aleatoria "número de caras que se muestran ". El recorrido de la variable X es Rx = { 0,1,2} y la distribución de probabilidades de X se presenta a continuación:

Variable X	0	1	2
Probabilidad de X	0.25	0.5	0.25

La probabilidad de un suceso B, P(B), definido en el recorrido de X, es decir B es un subconjunto del recorrido de X, se determina sumando las probabilidades de los resultados individuales asociados a él.

Sea B el suceso "aparece al menos una cara ". B está formado por el subconjunto {X=1, X=2} por lo que P(B) = 0.75

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual a un x_j específico, se define como **Probabilidad Acumulada a x_j** y se denota por

$$F(X = x_j) = P(X \leq x_j)$$

$$F(X = x_j) = \sum_{i=1}^{j} P(x_i) \qquad j = 1,2,3,4,5,.....n$$

Sea C el suceso "Aparece a lo más 1 cara", C está formado por el subconjunto { X= 0 , X = 1} y P(C) = P(X ≤ 1) = F (X = 1)

$$F (X = 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.75$$

Una fórmula, tabla o gráfica que muestra el recorrido de la variable aleatoria asociando sus probabilidades acumuladas se denomina distribución de probabilidad acumulada o distribución acumulada.
Por otra parte, si se conoce la distribución acumulada, es factible construir la distribución de probabilidades al determinar la probabilidad puntual P (xi) de la siguiente forma:

$$P(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Ejemplo:

3.5 Se sabe que en un grupo de 4 componentes se tienen 2 defectuosos, un Inspector prueba uno por uno hasta encontrar los dos defectuosos, una vez encontrados se terminan las pruebas, pero se prueba el segundo defectuoso como comprobación.

Sea Y la variable aleatoria "Número de pruebas necesarias para encontrar los dos defectuosos". La distribución de Probabilidades de Y se determina de la siguiente forma:

El recorrido de la Variable Aleatoria es $R_y = \{ 2, 3, 4 \}$

Al menos se deben efectuar dos pruebas, a lo más se deben probar los 4 componentes.

Las probabilidades puntuales asociadas a cada uno de los posibles valores de Y se calculan aplicando el concepto de probabilidad condicional:

P(Y=2) =la probabilidad de que la primera y la segunda prueba sean de los componentes defectuosos.

$P(Y=2) = 1/2 * 1/3 = 1/6$

P(Y=3) = la probabilidad de que: la primera y la tercera prueba sea de los componentes defectuosos y la segunda de un componente no defectuosos, o la primera sea de un componente no defectuosos y la segunda y la tercera de los componentes defectuosos.

$P(Y=3) = 1/2 * 2/3 * 1/2 + 1/2 * 2/3 +1/2 = 1/3$

P (Y=4) = La probabilidad de que: las dos primeras pruebas sean de los componentes no defectuosos y las dos últimas de los defectuosos, o la primera y la tercera de los componentes no defectuoso y la segunda y la cuarta de los defectuosos, o la primera y la cuarta de los componentes defectuosos y la segunda y tercera de los no defectuosos.

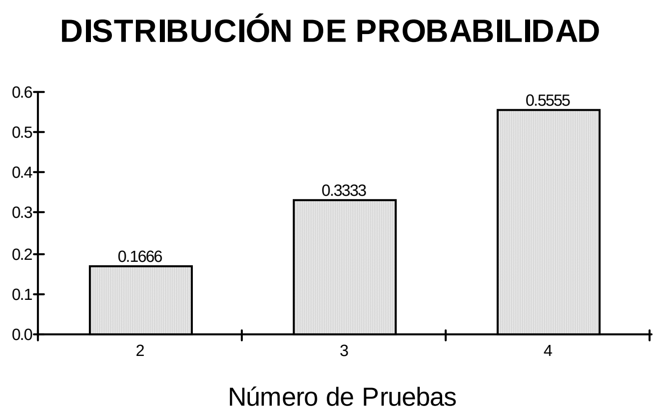
P(Y=4) = 1/2 *1/3 *1 + 1/2* 2/3 * 1/2 *1 + 1/2 *2/3 * 1/2 *1 = 1/2

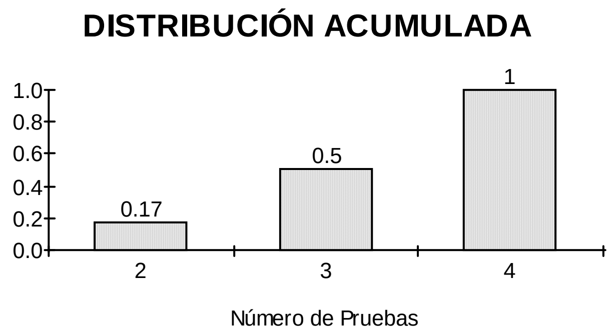
Distribución de Probabilidades de Y

Variable aleatoria Y	Probabilidad puntual	Probabilidad acumulada
2	1/6	1/6
3	2/6	3/6
4	3/6	1
suma	6/6	

Sea B el suceso “son necesarias más de 2 pruebas para encontrar los artículos defectuosos”, entonces la probabilidad del suceso B es,

P (B) = P(Y=3)+P(Y=4)= 5/6





Resuelva

3.6 Se eligen al azar 3 personas de una lista de estudiantes, se supone que la proporción de estudiantes de sexo femenino es 0.4 y que el número es suficientemente grande para considerar la selección de los 3 como pruebas independientes. Si X es el número de mujeres que aparecen en la muestra, calcule la distribución de probabilidades de X y la función acumulada, haga la representación gráfica y calcule $P(x \geq 2)$ y $P(X >1 / X <3)$. R: $P(X\geq 2) = 0.352$, $P(x>1 / x<3) = 0.3076$

4.3 Cambio de variables con distribuciones discretas

Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidades conocida.

Suponga que se define una nueva variable aleatoria Y en términos de X, $Y = \theta (X)$ donde a cada uno de los valores de X le corresponde uno y solamente uno de los valores de Y, e inversamente, $X = \omega (Y)$, entonces la función de probabilidad de Y está dada por:

$$G(Y) = P(\omega (Y))$$

Ejemplo:

3.7 En un bazar destinado a colectar fondos para una institución benéfica cuesta Q0.50 probar suerte en sacar un as de una pila de 52 cartas. Encuentre la distribución de probabilidades de la Variable aleatoria U “utilidad del juego” si gana Q4.00 si y solo si una persona saca un as.

Si X es la Variable aleatoria “Número de ases seleccionados” el recorrido de X está dado por Rx ={ 0, 1} y las probabilidades que le corresponden son:

$$P(X=0) =48/52 \quad y \quad P(X=1)= 4/52$$

La Variable U, se define en términos de X, U= 4*X - 0.50, entonces;

$$G(U) = P(X = (U+0.5)/4)$$

La Distribución de probabilidades de U está dada por:

Variable U	Probabilidad G(U)	Probabilidad Acumulada
-0.5	48/52	48/52
3.5	04/52	1

Resuelva

3.8 Un lote de 10 motores eléctricos debe ser vendido a un distribuidor siguiendo el siguiente procedimiento: se escogen al azar 2 elementos si uno o más son defectuosos el lote es rechazado y el distribuidor no lo compra, de otro modo lo acepta y lo compra.
Suponga que cada motor cuesta Q75 y se vende a Q100, si el lote tiene un motor defectuoso, ¿cuál es la distribución de probabilidades de la utilidad del vendedor?
R: P (250)= 36/45 P(-750) = 9/45

4.4 Variables aleatorias unidimensionales continuas

Una variable X es continua si el conjunto de sus posibles valores es infinito no numerable. La forma idónea de representar una variable continua es a través de un intervalo en el conjunto de los números reales: $Rx = \{ a \leq X \leq b\}$.

Ejemplo

3.9 Se ha observado, en un experimento, que el tiempo que tarda una reacción química de cierto compuesto está comprendido en el intervalo de 0.1 a 2.0 segundos. Si se realiza uno de estos experimentos y X es la variable "tiempo de reacción", los valores que puede tomar X, es decir su recorrido, se define con el intervalo

$$Rx = \{0.1 \leq X \leq 2.0\}$$

El modelo de variables aleatorias continuas puede ser utilizado en experimentos que tengan asociados recorridos discretos, que teniendo un gran número de elementos se prefiere representar teóricamente como continuos.

Ejemplo

3.10 El tiempo que permanece un turista europeo en un hotel es de: 45, 46, 47, ...72, 73, 74, o 75 días. Si X es la variable "Número de días de permanencia en el Hotel" el recorrido de X puede representarse como un recorrido continuo, al considerar que simplificando de esta forma el modelo no se tendrán errores significativos en el análisis de la variable.

$$Rx = \{45 \leq X \leq 75\}$$

4.5 Función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulada que describen las variables continuas

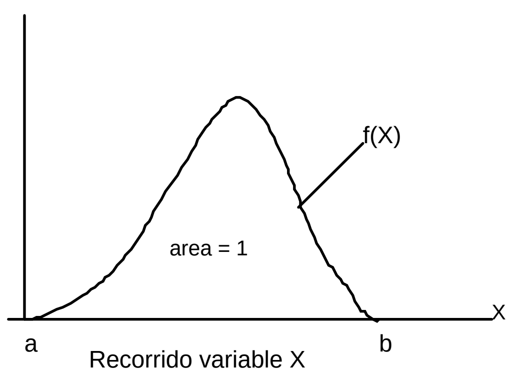
Anteriormente se definió una Variable Aleatoria Continua como una variable que puede tomar un número infinito, no numerable, de valores, y corresponden a los puntos sobre un intervalo en el conjunto de los números reales: oo < X < oo

$$Rx= \{ a \leq X \leq b\}$$

En consecuencia, dado que entre cualquiera de los valores a y b existe un número infinito de resultados, $P(X = x_i)$ pierde significado y es necesario definir la probabilidad a través de una función de d**ensidad de probabilidad f(X).**

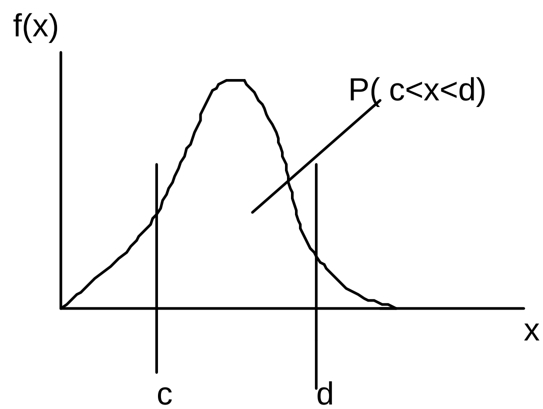
La función de densidad de probabilidad es una función no negativa, describe una curva en términos de la variable X que representa su comportamiento probabilístico y al dibujarse en los ejes del plano R^2 satisface las siguientes condiciones:

El área total delimitada por la curva f(X) y el eje X es igual a uno, por lo que se dice que describe un área de Probabilidad.



La sub área bajo la curva limitada por ella, el eje X y las perpendiculares trazadas en dos puntos c y d cualquiera, que pertenezcan al intervalo [a,b], constituye la probabilidad de que la variable tome los valores entre c y d, esto es $P(c \leq X \leq d)$, por lo que la probabilidad de un suceso, se determina encontrando el área bajo la curva que describe la función de densidad entre límites particularmente establecidos en el suceso.

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$$



La probabilidad de que la variable aleatoria X toma un valor menor o igual a x_o, un valor específico, representa la **Probabilidad Acumulada** a x_o, $P(X \leq x_o)$, definida para cualquier valor de x_o entre el intervalo [a,b] y se representa por $F(X = x_o)$

En términos generales, se define para toda x, perteneciente a un recorrido definido, una función $F(X_o)$ que se denomina Función de Distribución Acumulada o Función de Distribución de la variable X, que permite describir su comportamiento probabilístico, esta función se calcula de la forma siguiente

$$F(Xo) = \int_a^{Xo} f(x)dx \qquad a \leq x_o \leq b$$

Si F(X) es la función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua, entonces la función de densidad de probabilidad f(X) se determina como dF(X)/dx para todos los valores posibles de X.

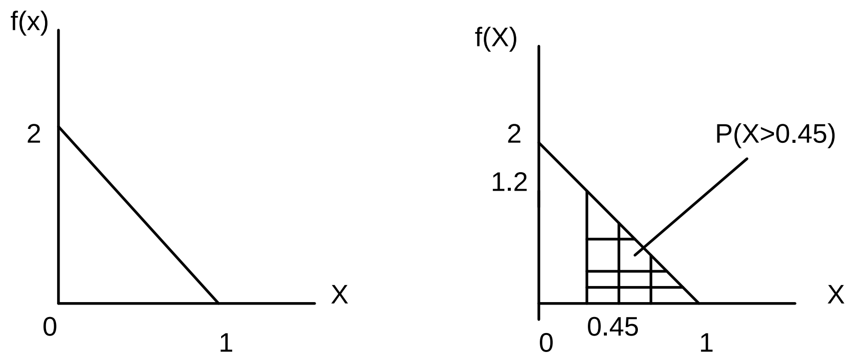
La Función de distribución acumulada permite calcular las probabilidades de cualquier evento así:

$P(c \leq X \leq d) = F(X = d) - F(X = c)$

Ejemplo:

3.11 El tiempo en horas, que transcurre entre una llamada de emergencia y otra en un hospital, se considera como una variable X, continua, en el intervalo de cero a uno, $0 \leq X \leq 1$, por lo que puede tomar cualquiera de los infinitos puntos medibles en ese intervalo; así entre una y otra llamada pueden pasar: 30 minutos, 15 segundos 9 milésimas de segundo; o 30 minutos, 16 segundos, una décima de segundo; etc.

Si la función de densidad de probabilidad de la variable es f(X) = 2-2X, la curva (recta) describe la siguiente arrea:



Ya que f(X) limita con el eje X el área de un triángulo rectángulo con base una unidad y altura 2 unidades, tenemos el área total del triángulo igual a (1/2) * base * altura = (1/2) * 1 * 2 = 1, y representa un área de probabilidad,

Para calcular la probabilidad que el tiempo entre una llamada y otra sea mayor de 27 minutos (0.45 horas), se determina el área bajo la curva como lo indica la figura; Area = (1/2) * (1-0.45) * 1.1 = 0.3025

$$P(X > 0.45) = 0.3025$$

Para encontrar el valor del área bajo la curva generalmente se usa el cálculo integral

$$P(X > 0.45) = \int_{0.45}^{1} (2 - 2x)dx = 0.3025$$

Si X es una variable aleatoria continua con f(X) = 2 - 2X, donde 0 < X < 1
La función de distribución acumulada de X, $F(X_o)$ está dada por:

$$F(X_o) = F(X=x_o) = \int_{0}^{xo} (2 - 2x)dx = 2x_o - x_o^2 \quad \text{si } 0 < x_o < 1$$

$F(X=x_o) = 0$ si $x_o \leq 0$

$F(X=x_o)= 1$ si $x_o \geq 1$

A partir de esta función de distribución es posible obtener la probabilidad de que X tome un valor en el intervalo [0.5, 0.75]:

$P(0.5 \leq X \leq 0.75) = F(x_o=0.75) - F(x_o=0.5) = [2 * 0.75 - 0\text{-}75^2] - [2 * 0.5 - 0.5^2] = 0.1875$

Resolver

3.12 Sea Y una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad
$f(x) = 3y^2 \qquad 0 < y < 1$

Encuentre

- $P(0.2 < y < 0.6)$
- La función de distribución acumulada
- Utilizando la función de distribución calcule P(X >02.)

R: 0.208, 0.992

4.6 Cambio de variables con distribuciones continuas

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f(X) conocida, al definir una nueva variable Y como función de X, $Y = \phi(X)$, o en forma inversa $X = \omega(Y)$, existiendo una correspondencia uno a uno entre los valores de X y Y, entonces la distribución de probabilidades de Y, g(Y)es: $g(Y) = f(\omega(Y))\ |J|$, donde J recibe el nombre de jacobiano de la transformación y es la primera derivada de $\omega(Y)$ respecto de Y.

Ejemplo:

3.13. Sea X una Variable Aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(X) = X^2/81$, en el recorrido $-3 \leq X \leq 6$

La función de densidad de probabilidad de Y = (1/3) (12-X) está dada por:

$Y = \phi(X) = 1/3\ (12-X) \qquad \omega(Y) = X = 12 - 3Y$

$dx / dy = d\,\omega(Y) / dy = J = -3$

$g(Y) = [(12-3Y)^2 / 81] * |-3| = (12 - 3Y)^2 / 27$

En el recorrido $2 \leq Y \leq 5$

Suponga que X es una Variable Aleatoria Continua, con función de densidad de probabilidad f(X). Si Y se define como una transformación entre los valores de X y Y que no tienen una correspondencia uno a uno, pero el intervalo sobre el cual X se define puede dividirse en k conjuntos mutuamente excluyentes de tal manera que a cada una de las funciones inversas $X_1 = \omega_1(Y)$; $X_2 = \omega_2(Y)$; $X_3 = \omega_3(Y)$; .... $X_k = \omega_k(Y)$ de $Y= \phi(X)$ mantienen para los valores de X, Y una correspondencia uno a uno, entonces la distribución de probabilidades de Y es

$$g(Y)= \sum_{i=1}^{k} f(\omega_i(Y))\,|J_i|$$

Donde Ji, jacobiano, es la primera derivada de $\omega_i(Y)$ respecto de Y

Ejemplo:

3.14 Se considera a X como una variable aleatoria con función de densidad:
$f(X) = (1+X)/2$ en el intervalo $-1 < X < 1$, la función de densidad de probabilidad de $Y = X^2$ se obtiene de la siguiente forma:

Dado que no hay una correspondencia uno a uno entre X y Y el intervalo sobre el cual se define X puede dividirse en conjuntos mutuamente excluyentes:

$-1 < X < 0 \qquad X_1 = \omega_1(Y) = -(Y^{1/2})$
$0 < X < 1 \qquad X_2 = \omega_2(Y) = +(Y^{1/2})$

En los cuales a toda X le corresponde un valor de Y

Entonces dado que:

$|J_1| = |-1/2(Y^{-1/2})|$
$|J_2| = |1/2(Y^{-1/2})|$

La función de densidad de probabilidad de Y:

$g(Y) = [(1-Y^{1/2})/2][1/2(Y^{-1/2})] + [(1+Y^{1/2})/2][1/2(Y^{-1/2})] =$

$g(y) = 1/2(Y^{-1/2})$ en el recorrido $0 < Y < 1$

5. Esperanza y varianza de las variables Aleatorias

En la descripción de las variables aleatorias, los parámetros dan una información valiosa acerca de la distribución de probabilidades y algunas veces se usan para especificarlas. Dos parámetros importantes son La Esperanza (Esperanza matemática, Valor esperado) y la Varianza, asociada a esta última, la Desviación Estándar.

5.1 Esperanza

La esperanza E(X), o valor esperado de X es un promedio ponderado de los posibles valores de X, teniendo como medida de ponderación sus probabilidades de ocurrencia.

Para calcular la Esperanza de una Variable, sea esta discreta o continua se aplican las fórmulas siguientes:

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} xi * p(xi)$ (variables discretas)

$E(X) = \int_{-oo}^{oo} x * f(x)dx$ (Variables Continuas)

Sea g(X) una función de la variable aleatoria X, entonces:

$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(xi) * p(xi)$ (variables discretas)

$E(g(X)) = \int_{-oo}^{oo} g(x)f(x)dx$ (Variables Continuas)

Propiedades de la Esperanza

- Si X no es variable aleatoria sino una constante, C, entonces E(X) = C
- El valor esperado de X multiplicada por una constante C, E(CX), es igual al valor esperado de X multiplicado por la constante, E(X)* C
- Si X, Y son dos variables cualesquiera, el valor esperado de la suma de la variables es la suma de los valores esperados.
  $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
- Si $X_1, X_2, X_3, X_i \ldots\ldots\ldots X_n$, son variables cualesquiera independientes, entonces:
  $E(X_1+X_2+X_3+X_i+\ldots\ldots X_n) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_i)+\ldots\ldots E(X_n)$
- El valor esperado de la suma o diferencia de dos o más funciones de una variable aleatoria X es:

$E[\ g(x) \pm h(x)\ ] = E(g(x)\ ) \pm E\ (h(x))$

Ejemplo

3.15 La distribución de probabilidad de X, el número de imperfecciones por cada 10 metros, de una tela sintética dispuesta en rollos continuos de ancho uniforme, está dada por

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01

El número promedio de imperfecciones en 10 metros de esta tela es:

E(X) = 0*0.41 + 1*0.37 +2*0.16 + 3*0.05 + 3*0.01 = 0.88

3.16 Al empleado de un lavado de autos se le paga de acuerdo con el número de autos que lava. Suponga que las probabilidades son 1/12, 1/12, 1/4, 1/4, 1/6, y 1/6 respectivamente de que el empleado reciba $7, $9, $11, $13, $15, o $17 entre las 4:00 y las 5:00 pm en cualquier viernes soleado.

X	7	9	11	13	15	17
P(X)	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

La ganancia esperada del empleado para este periodo particular es:
E(X) = 12.6667

3.17. Suponga que el tiempo (en minutos) en el que se obtiene una reacción química para cierto compuesto es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f(X) = 6X (1-X) en el recorrido $0 \leq X \leq 1$, y f(X) = 0 en cualquier otro caso.
El tiempo promedio en el que se obtiene la reacción es de 0.5 minutos

$E(X) = \int_0^1 x * (6x(1-x)dx = 1/2$

Resuelva

3.18 El jefe de policía de una ciudad sabe que las probabilidades de 0, 1, 2, 3, 4, o 5 robos de autos en cierto día son 0.21, 0.37, 0.35, 0.13, 0.03, 0.01, respectivamente ¿Cuántos robos de auto espera que ocurran en un día? R: 1.47

3.19 La ganancia de un comerciante de motocicletas en unidades de 1000 dólares se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad
f(x) = 2 (1-X) $0 \leq X \leq 1$
Determine la ganancia esperada del comerciante R: 333.33 $

5.2 Varianza y desviación estándar

La varianza de una variable aleatoria X, es una medida de dispersión de la distribución de probabilidades, mide el grado de concentración de los valores de X, y es el promedio ponderado o esperanza de las desviaciones cuadradas de cada uno de los valores posibles de X en relación a E(X).

$$V(X) = E(x_i - E(X))^2$$

$E(xi - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(xi - E(X)\right)^2 * p(xi)$ (variables discretas)

$E(xi - E(X))^2 = \int_{-oo}^{oo} (x - E(X))^2 * f(x)dx$ (Variables Continuasi)

Una fórmula alternativa para calcular la varianza es la siguiente

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Donde

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} xi^2 * p(xi)$ (variables discretas)

$E(X^2) = \int_{-oo}^{oo} x^2 * f(x)dx$ (Variables continuas)

La varianza de una función g de la variable aleatoria X , g(X) , se determina como:

$$V(g(x)) = E[g(X) - E(g(X))]^2$$

$V(g(X)) = \sum_{i=1}^{n}(g(xi) - E\left(g(xi)\right))^2 * p(xi)$ (Variables Discretas)

$V(g(X)) = \int_{-oo}^{oo}(g(x) - E\left(g(X)\right))^2 * f(x)dx$ (Variables Continuas)

La raíz cuadrada de la varianza es la Desviación Estándar, σ (X), da información sobre qué tan alejados, en promedio, pueden situarse los valores observados de X con respecto a su valor esperado y una idea del recorrido de la distribución si este es desconocido.

Propiedades de la varianza

- Si X es una constante, C, entonces V(X) = 0
- El valor de la varianza de una variable X multiplicada por una constante C, V(CX), es igual al valor de la varianza de X multiplicado por la constante al cuadrado, V(X) C^2
- Si X, Y son dos variables independientes, la varianza de la suma de las variables es igual a la suma de las varianzas.

V(X+Y) = V(X)+V (Y)

Además V(X-Y) = V(X) +V (Y)

- Si X_1, X_2, X_3, X_i .... X_n, son variables independientes, entonces:

$V(X_1+X_2+X_3 \ +X_i+........ X_n) = V(X_1)+ V(X_2) +V(X_3 \ )+ V(X_i) \ +....... V(X_n)$

Ejemplo

3.20 Continuando con el ejemplo 3.16. Suponga que el tiempo, X medido en minutos, en el que se obtiene una reacción química para cierto compuesto es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f(X) = 6X (1-X) en el recorrido $0 \leq X \leq 1$, y f(X) = 0 en cualquier otro caso, como ya se planteó

$E(X) = \int_0^1 x * (6x(1-x))dx \ = 1/2$

Entonces se calcula la varianza del tiempo de reacción de la forma siguiente:

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 * (6x(1-x))dx = 0.3$

$V(X) = 0.3 - 0.5^2 = 0.05$ minutos cuadrados

σ (X) = 0.2236 minutos, interpretando que los tiempos reales de reacción cuando se elabora el compuesto se alejan de su valor esperado en promedio 0.2236 minutos.

Resuelva

3.21 El jefe de policía de una ciudad sabe que las probabilidades de 0, 1, 2, 3, 4, o 5 robos de autos en cierto día son 0.21, 0.37, 0.35, 0.13, 0.03, 0.01, respectivamente ¿Cuál es del valor de la desviación estándar del número de autos robados?
R: 1.053

3.22 La ganancia de un comerciante de autos en unidades de 1000 dólares se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad
f(x) = 2 (1-X) $0 \leq X \leq 1$
Determine la varianza y la desviación estándar de X.
R: 0.551, 0.2347

5.3 Ejemplos de aplicación de la esperanza y la varianza de una variable aleatoria

3.23 En una oficina de servicio al cliente, no se puede conocer con exactitud cuántas personas serán atendidas en un día cualquiera, por tanto, el número de clientes que serán atendidos es una variable aleatoria. Sin embargo algunas decisiones administrativas requerirán conocer el número de clientes (variable) que se espera que lleguen.

Si los expediente diarios de registro indican que la variable fluctúa entre 10 y 15 ¿Qué se espera que suceda? ¿Será una cifra cercana a 15? ¿O cercana a 10 ?

El Valor Esperado es un concepto fundamental en éste análisis, ya que representa un promedio ponderado de los resultados que se esperan en el futuro.

Si la distribución de probabilidades de esta variable X= Número de clientes atendidos es P(X) = 1/6 para X = 10, 11, 12, 13, 14, 15. El valor esperado es 12.5.

$E(X) = 10/6 + 11/6 + 12/6 + 13/6 + 14/6 + 15/6 = 12.5$

El director de la oficina, basará sus decisiones en función a este valor esperado, hará una estimación de tiempo que estará ocupado el personal, la cantidad de material a utilizar, etc.

¿Qué significa esta cifra? Significa que durante un largo periodo, el número de clientes diarios deberá promediar cerca de 12.5. No hay que olvidar que es un valor esperado, no significa que el día de mañana visitarán el centro 12.5 personas.

La Varianza que corresponde a esta variable aleatoria se calcula de la siguiente forma:

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donde

$E(X^2) = 10^2/6 + 11^2/6 + 12^2/6 + 13^2/6 + 14^2/6 + 15^2/6$

$E(X^2) = 159.1666$

$V(X) = 159.1666 - 12.5^2 = 2.9166$

La Desviación Estándar de la variable es 1.707, concluyendo que el número de clientes que llegan se alejan en promedio de su valor esperado en $\pm$ 1.707.

3.24 Suponga que una tienda de abarrotes compra cinco envases de leche descremada al precio de mayoreo de \$1.20 por envase y la revende a \$1.65 por envase, Después de la fecha de caducidad, la leche que no se vende se retira de los anaqueles y el tendero recibe un crédito del distribuidor igual a tres cuartos del precio de mayoreo. Si la distribución de probabilidades de la variable X, número de envases que se venden del lote es:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	1/15	2/15	2/15	3/15	4/15	3/15

Encuentre la utilidad (U) esperada.

$U = 1.65\ X + 0.9\ (5 - X) - 1.20\ (5) = 0.75\ X - 1.5$

$E(U) = 0.75\ E(X) - 1.5$
Dado que $E(X) = 3.06667$ envases
$E(U) = 0.75\ (3.0667) - 1.5 = 0.8$ \$

Encuentre la varianza de U
$V(U) = (0.75)^2\ V(X)$
Dado que la varianza de X es 2.32888
$V(U) = (0.75)^2 * 2.23888 = 1.3099$ dólares cuadrados

3.25 El tiempo total, medido en unidades de 100 horas que un adolescente utiliza su estero en un periodo de un año es una variable continua X que tiene la función de densidad:

$f(X) = x \qquad 0<x<1$
$f(X) = 2-x \qquad 1 \leq x < 2$
$f(X) = 0 \qquad$ en otro caso

Calcule la media de la variable aleatoria $Y = 60\ X^2 + 39\ X$ donde Y es igual a número de kilowatt hora que gasta al año.

$$E(Y) = E\ (\underset{1}{60\ X^2} + \underset{2}{39\ X}) = E\ (60\ X^2) + E\ (39\ X) = 60\ E(X^2) + 39\ E(X)$$

$$E(X) = \int_{0} x^{2}\,dx \quad + \quad \int_{1} x\,(2-x)\,dx = 1$$

$$E(X^{2}) = \int_{0}^{1} x^{3}\,dx \quad + \quad \int_{1}^{2} x^{2}\,(2-x)\,dx = 1.1666$$

$E\,(Y) = 60\,(1.1666) + 39\,(1) = 109$

5.4 Momentos de las variables aleatorias

La media y la desviación estándar a pesar de ofrecer información útil en el análisis de variables aleatorias, no proporcionan una descripción única de las distribuciones, por lo tanto se considera otro conjunto de medidas numéricas que bajo condiciones generales determinan de manera única la distribución de la variable aleatoria, esta medidas son los Momentos.

El i-ésimo momento de una variable aleatoria con respecto a su origen se denota como $E\,(X^{i})$ y representa el valor esperado de la i- ésima potencia de la variable X

$E(X^{i}) = \sum_{j=1}^{n} Xj^\wedge i * p(Xj)$ (variables discretas)

$E(X^{i}) = \int_{-oo}^{oo} x^\wedge i * f(x)dx$ (Variables continuas)

Se identifica al valor esperado y la varianza de una variable aleatoria como, el primer momento respecto al origen y la diferencia entre el segundo momento y el primer momento respecto al origen, respectivamente.

Otras medidas importantes de las variables aleatorias se definen como el i-ésimo Momento Central, o respecto a su media, $E(\,(X - E(X)\,)^{i})$, la varianza de la variable aleatoria se identifica como el segundo momento respecto a su media .

6. Desigualdad de Chebyshev

El conocimiento de una medida de dispersión, permite tener una idea aproximada de la amplitud de las desviaciones que efectivamente tendrán los valores de la variable aleatoria en relación con su valor medio. Sin embargo, aunque la media y la varianza se consideran suficientes para caracterizar por completo una distribución conocida, el reciproco no es posible, es decir si se conoce la esperanza y la varianza y no se especifica nada más respecto a la forma de su distribución, no es posible asociar probabilidades a sucesos especiales.

En los casos en que ningún supuesto referente a la distribución está justificado, la Desigualdad de Chebyshev da una información útil acerca del comportamiento de la variable aleatoria, asignando una cota inferior (superior), para asociar una probabilidad de que el valor de la variable esté dentro de un intervalo señalado. Afirma que al menos $(1-1/k^2)$ *100 de los datos, generados al observar la variable, está entre el intervalo $E(x) \pm k\,\sigma(x)$ donde k es cualquier número mayor que 1.
Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y ε un número real positivo

$P(|x-\mu| \geq \varepsilon) < V(X)/\varepsilon^2$ (cota superior)

$P(|x-\mu| < \varepsilon) \geq 1 - V(X)/\varepsilon^2$ (cota inferior)

Si $\varepsilon = k\sigma$ $\quad P(|x-\mu| \geq k\sigma) < 1/k^2$

Y por tanto $P(|x-\mu| < k\sigma) \geq 1/k^2$

Esta desigualdad es notable por lo poco que se presume de la conducta probabilística de la variable aleatoria y demuestra como la varianza mide el grado de concentración de los datos.

Ejemplo

3.26. Al medir un conjunto de marcos de aluminio se tiene como resultado un ancho promedio de 3.03 pulgadas con una desviación estándar de 0.05.

La proporción mínima de marcos que se considera deben estar entre $\pm$ 0.125 pulgadas de su media se calcula:

Si $\varepsilon = k\sigma = 0.125$
$P(|X-3.03| < 0.125) \geq 1 - (0.05^2/0.125^2) \geq 0.84$.

De acuerdo a la Desigualdad de Chebyshev, la proporción mínima de marcos que se encuentran en el intervalo [2.905, 3.155] es de 84%.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente.
Si $\varepsilon = k\sigma$ = 0.125 entonces k es igual a 2.5
$P(|X-3.03| < 2.5 * 0.05) \geq 1 - (1/2.5^2) \geq$ 1-0,16 (0.84)

Resuelva

3.27 Los diámetros de la fechas para chumaceras tiene una media de 1.27776 cm y una desviación estándar de 0.00254, el ensamble permite una tolerancia de $\pm$ 0.03 a partir de la media.

Cuál es la proporción limite máxima de flechas que no cumplen con las especificaciones 1.277 $\pm$ 0.03 R: 0.71%

Calcule la proporción mínima de flechas que están entre los límites 1.2777$\pm$ 0.03

Cuál es la proporción limite mínima de flechas que están entre los límites 1.2776$\pm$ 0.01. R: 0.9354

7. Problemas resueltos

3.28 De una caja que contiene 4 monedas de 1000 pesos y 2 de 500 pesos, se seleccionan 3, sin reemplazo. Determine la distribución de probabilidad del total de dinero que se obtiene con las tres monedas.

A: la moneda es de 1000 pesos

B: la moneda es de 500 pesos

X = número de monedas de 1000 pesos

T = total de las tres monedas = 1000X + 500 (3-X)

Espacio de resultados	X	T
1 de A y 2 de B	1	2000
2 de A y1 de B	2	2500
3 de A y 0 de B	3	3000

X	P(X)	F(X)
1	${}_4C_1\,{}_2C_2 / {}_6C_3 = 0.2$	0.2
2	${}_4C_4\,{}_4C_4/ {}_6C_3 = 0.6$	0.8
3	${}_4C_3\,{}_2C_0/ {}_6C_3 = 0.2$	1

Distribución de probabilidades de T

T	2000	2500	3000
P (T)	0.2	0.6	0.2

3.29 Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad de la forma siguiente:

$f(X) = 2X \qquad 0 \leq x \leq 1$

$f(X) = 0$ en otro caso

a. La función de distribución acumulada de X es:

$$F(X) = P(X < Xo) = \int_0^{x_o} 2x\,dx = X_o^2 \text{ cuando } 0 \leq Xo \leq 1$$

y se define como:
$F(X) = 0$ si $-\infty < X_o < 0$
$F(X) = X_o^2$ si $0 \leq X_o \leq 1$
$F(X) = 1$ si $X > 1$

b. $P(0.2 \leq X \leq 0.4) = F(0.4) - F(0.2) = 0.12$

c. $E(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = 2/3$

d. $E(X^2) = \int_0^1 2x^3\,dx = 1/2$

$V(X) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18$

e. $\sigma(X) = 0.2357$

3.30 Si $f(X) = X$ cuando $0 < x \leq 1$ y $f(X) = 2 - X$ cuando $1 < x \leq 2$, calcule la función acumulada de X.

$F(X) = \int_0^{x_o} x\,dx = x_o^2/2$ cuando $0 < X_o \leq 1$

$F(X) = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{x_o} (2 - x)\,dx =$

$0.5 + (2x_o - x_o^2/2 - 1.5) = 2x_o - x_o^2/2 - 1$ cuando $1 < X_o \leq 2$

3.31 Considere el siguiente juego: se lanza un dado normal, si cae el #2, el jugador gana Q20, si la cara muestra el #4, gana Q40 y si muestra el #6, pierde Q30, en otro caso ni gana ni pierde. ¿Cuál es la ganancia esperada del juego? ¿Cuál es la varianza? ¿Cuál es el precio justo que debe pagar por jugar?

Y	P (Y)
0	3/6
20	1/6
40	1/6
-30	1/6

$E(Y) = 0 + 20/6 + 40/6 - 30/6 = 30/6 = 5$

$E(Y^2) = 0 + 20^2/6 + 40^2/6 - 30^2/6 = 483.33$

$V(Y) = 483.33-25 = 458.33$
Desviación estándar $\sigma = 21.40$
El precio justo de juego, es el valor esperado de la ganancia, Q5.

3.32 En cierta ciudad el consumo de energía eléctrica, en millones de Kilowatts hora, es una variable aleatoria con función de densidad 1/6 X + K cuando $0 \leq X \leq 3$.
Calcular el valor de K.
Calcular la esperanza y la varianza del consumo.

$$\int_0^3 (1/6\, X + K)\, dx = 9/12 + 3k = 1 \text{ entonces } K = 1/12$$

$$E(X) = \int_0^3 x\,(1/6\, x + 1/12)\, dx = \int_0^3 1/6\, x^2 + 1/12\, X =$$

$1.5 + 0.375 = 1.875$

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2\,(1/6x + 1/12)\, dx = \int_0^3 1/6\, x^3 + 1/12\, x^2\,)\, dx =$$

$3.375 + 0.75 = 4.125$

Varianza de X es $4.125 - (1.875)^2 = 0.6093$

Desviación estándar $\sigma = 0.7806$

3.33 De acuerdo con las tablas de mortalidad la probabilidad de que un ciudadano muera en su vigésimo año de vida es 0.00179. Se supone que una compañía de seguros vende por $5 una póliza de $1000, por un año, a un joven de 19 años. ¿Cuál es el beneficio esperado de la compañía de seguros al vender esa clase de pólizas, sin considerar los gastos de venta y administración? ¿Cuál es la desviación estándar del beneficio?

X	P(X)
5	1-0.00178
-1000	0.00178

$E(X) = 3.2111$
$V(X) = 1804.95 - 3.211^2 = 1794.64$

Desviación estándar σ = 46.36

3.34 Una característica importante de las baterías para un carrito de golf es el número de minutos que trabaja antes de necesitar recargar. Un fabricante anuncia que sus baterías trabajan durante un periodo de 100 minutos con una desviación estándar de 5 minutos. Determine el intervalo que contenga por lo menos el 90% de los periodos de funcionamientos de las baterías.

$P(\mu - ks \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - 1 / k^2$
$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.9$

$0.9 = 1 - 1 / k^2$ entonces $k = 3.1622$
$\mu - 3.1622 * 5 \leq X \leq \mu + 3.1622 * 5$ entonces $84.189 \leq X \leq 115.811$

Otra forma de expresar la Desigualdad:
$P(|x - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - V(X)/\varepsilon^2$, entonces $0.9 = 1 - V(X) / \varepsilon^2$
Entonces $\varepsilon = 15.811$

El intervalo es $\mu - 15.811 \leq X \leq \mu + 15.811$
$84.189 \leq X \leq 115.811$.

3.35 Se ha observado, durante un largo periodo de tiempo, que el número de clientes que acuden a un mostrador en un día cualquiera es una variable aleatoria, con media 20 clientes por día y desviación estándar 2 clientes. Si no se conoce la forma de la distribución ¿qué puede decirse dela probabilidad de que el número de clientes esté entre 16 y 24 para el día de mañana?

Si $\varepsilon = k\sigma = 4$ entonces k es igual a 2
$P(|X - 20| < 2 * 2) \geq 1 - (1 / 2^2) \geq 1 - 0.25$ (0.75)

Se puede decir que mañana el número de clientes estará entre 16 y 24 con una probabilidad de al menos ¾.

3.36 Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar uno o dos clientes por día, con probabilidad 1/3 y 2/3 respectivamente. Cada entrevista produce una venta de 50000 pesos o ninguna venta con probabilidad 1/10 y 9/10 respectivamente, ¿cuál es el valor esperado de sus ventas diarias?

Ventas Diarias X	Probabilidad
0	1/3* 0.9+ 2/3 *0.9*0.9= 0.84
50000	1/3* 0.1 + 2/3 * 0.1*0.9*2 = 0.15333
100000	2/3 * 0.1*0.1 = 0.00666

$E(X) = 0 + 7666.5 + 666.66 = 8333.16$ pesos

3.37 La ganancia de un comerciante de autos en unidades de 1000 dólares se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$f(x) = 2\,(1-X) \qquad 0 \leq X \leq 1$

Determine la esperanza, la varianza y la desviación estándar de X.

$$E(X) = \int_0^1 x\,(2-2x)\,dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 1/3$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,(2-2x)\,dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\,dx = 1/6$$

$V(X) = 1/6 - (1/3)^2 = 0.551$

$\sigma\,(X) = 0.2347$

3.38 Sea Y una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad

$f(x) = 3\,y^2 \qquad 0 \leq y \leq 1$

$$P\,(0.2 < y < 0.6) = \int_{0.2}^{0.6} 3\,y^2\,dy = 0.208$$

Otra forma de calcular la probabilidad del suceso aplicando la función de distribución acumulada es:

$$F\,(y) = \int_0^{y_o} 3\,y^2\,dy = y_o^{\,3} \quad \text{cuando } 0 \leq y_o \leq 1$$

$P\,(0.2 < y < 0.6) = F\,(0.6) - F\,(0.2) = 0.208$

8. Problemas Propuestos

3.39 La eficiencia de las unidades de calefacción por energía solar depende de la cantidad de radiación del sol. Para un mes de octubre típico, la radiación solar total diaria en Tampa, Florida, EE.UU. sigue aproximadamente la función de densidad de probabilidad que se da a continuación (las unidades son cientos de calorías)

$f(x) = (3/32)\ (X-2)\ (6-x)$ cuando $2 \leq x \leq 6$
$f(x) = 0$ en otro caso

a. Calcular la probabilidad de que la radiación solar sea mayor que 300 calorías en un día normal de octubre. R: 27/32

b. ¿Qué cantidad de radiación solar queda rebasada exactamente el 50% de los días de octubre, según este modelo? R: 4

3.40 La función de densidad de la longitud de una varilla de metal es:

$f(x) = 2$ cuando $2.3 \leq x \leq 2.8$ metros.
$f(x) = 0$ en otro caso

Si las especificaciones de la varilla en cuanto a su longitud es que debe tener entre 2.25 y 2.75 metros ¿Cuál es la proporción de varillas que no cumplen con este requerimiento? R: 0.1

Suponga que la función de densidad es $f(X) = 2$ para un intervalo de longitud igual a 0.5 metros. ¿Sobre qué valor debe centrarse la densidad para alcanzar la proporción más grande de varillas que cumplen con las especificaciones? R:2.5

3.41 Una empresa de biotecnología puede producir juegos para pruebas diagnósticas con un costo de $20.00. El precio de venta de cada juego para el que exista demanda es de $100.00, sin embargo debido a la vida media de los componentes que integran el juego, si este no se vende en la semana en que se produce entonces tiene que desecharse. El costo asociado con el desecho de un juego es de $5.00.

En la tabla siguiente se resumen la demanda semanal (Variable Aleatoria)

Número de unidades	0	50	100	200
Probabilidad	0.05	0.4	0.3	0.25

¿Cuántos juegos deben producirse cada semana para maximizar la ganancia de la compañía? R: 200

3.42 Halle la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X, dado que su función de distribución acumulada está dada por:

F(X) = 0 para x <0
F(X) = sen x para 0 < X < p /2
F(X) = 1 para x > p /2
R: f(x) = cos x 0 < x < p/2

3.43 El diámetro en centímetros de unos balines metálicos para uso industrial, es una variable aleatoria continua X cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$f(X) = 2cx - cx^2 - 0.99c \qquad 0.9 < X < 1.1$

a. Obtenga el valor de la constante c
b. Halle la media y la desviación estándar de X
c. Halle la mediana de la variable X

R: c = 750, μ =1, σ= 0.04472 m_o= 1

3.44 Sea X una variable aleatoria Discreta con distribución de probabilidad dada por:

X	1	a	5	10	20
P(X)	0.5	0.25	0.1	0.1	p

Calcule el valor de a y p si se sabe que $E(X^2)$ =37 y 1 < a < 5
Calcule media, la varianza y la desviación estándar para la variable X
R: a = 4, p = 0.05, E(x) = 4, V(X) = 21

3.45 Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(X) = X e^{-x}$ para x > 0

a. Determine la función acumulada de X
b. Calcule la probabilidad de que X sea mayor o igual que 2

R: $F(X) = 1 - e^{-x}(1+ x)$ x > 0; $P(X > 2) = 3/e^2$

3.46 Tenemos dos urnas de las cuales la primera contiene n bolas blancas y 2n bolas negras y la segunda contiene 2n bolas blancas y n negras. Se escoge al azar una urna y de ellas se saca una bola. Si la bola es blanca se saca de la misma urna, sin reemplazo, otra bola y en caso contrario se saca una bola de la otra urna. Sea X una variable aleatoria que representa el número de bolas blancas extraídas. Para que valor de n se cumple E(X) < 1. R: n = 1

CAPÍTULO 4

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES DISCRETAS

¡*QUÉ FRUSTRACIÓN! ¡LAS COPIAS*!

Mancy, secretaria de Harol Rodríguez, gerente de operaciones de HH Industrias, alcanzó a Lázaro en el pasillo. ¿Podrías regalarme algunos minutos? Tenemos un problema con la nuestras fotocopiadoras y Harol dice que tal vez tú podrías darnos algún consejo.

Claro que sí, sonrió Lázaro, en cualquier momento te espero en mi oficina. Sabía que las dos fotocopiadoras que utilizaban en la compañía eran una fuente de frustraciones para el personal completo. Habían sido adquiridas por el antiguo dueño, el señor Douglas, en una tienda de implementos de segunda mano. Aunque fueron algo confiables durante los dos primero años, el técnico de reparaciones se había convertido en un empleado casi permanente de la oficina.

Nancy tocó la puerta y entro cuando Lázaro le dijo que lo hiciera.

Harol me pidió que determinara la mejor opción para tratar el asunto de las fotocopiadoras, explicó. ¡Tú sabes cuántos problemas tenemos cunado la carga de trabajo se nos viene encima y una de las máquinas no funciona! Lo que necesito de ti es que me des algunos detalles sobre la forma de evaluar los costos de las diferentes opciones que tenemos para resolver el problema.

Lázaro preguntó ¿tienes registro del estado diario de las dos máquinas?

Nancy se quejó: parece que una máquina o la otra se descompone una vez a la semana, y a últimas fechas hemos tenido que enviar a alguien afuera para reproducir documentos, ¡lo cual es una verdadera lata! También tenemos registro de las solicitudes de servicio de los últimos dos años ¿nos sirve eso?

Seguro que sí, respondió Lázaro ¿puedes calcular el costo promedio de cada servicio en el caso de que una de las máquinas o las dos estuvieran fuera de servicio? Eso nos será de utilidad para la evaluación. Mientras tanto me voy a poner a trabajar con los datos sobre las fallas de las máquinas.

Remitiéndose a los datos que se presentan en la tabla 1 Lázaro estimó las probabilidades de que las máquinas estén descompuestas cualquier día dado.

Tabla 1 registro del estado de las máquinas

Situación de la máquina de fotocopiado																										
1 funciona - 0 no funciona																										
Mes		Días laborados en el mes																								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	Máquina 1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	Máquina 1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
	Máquina 2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
3	Máquina 1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4	Máquina 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
5	Máquina 1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
6	Máquina 1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
7	Máquina 1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	Máquina 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
8	Máquina 1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
9	Máquina 1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	Máquina 2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
10	Máquina 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	Máquina 2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Al calcular el porcentaje de días funcionando de cada una de las máquinas en los meses a los que correspondían los registros y que se presentan en la tabla 2 se dio cuenta que tenían similares comportamientos.

En los meses analizados cada máquina se descomponía de dos a tres veces y esta falla dejaba a la fotocopiadora sin funcionar por un día.

Tabla 2 Porcentaje mensual de días que las máquinas están funcionando

Mes		Fracción de días funcionando en el mes
1	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.92
2	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.88
3	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.88
4	Máquina 1	0.92
	Máquina 2	0.88
5	Máquina 1	0.92
	Máquina 2	0.88
6	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.92
7	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.92
8	Máquina 1	0.92
	Máquina 2	0.88
9	Máquina 1	0.88
	Máquina 2	0.92
10	Máquina 1	0.92
	Máquina 2	0.88

Lázaro se preguntó: ¿cuál es la probabilidad de que una máquina esté descompuesta en cualquier día dado?

Utilizando el criterio frecuentista para estimar esta probabilidad determinó que la probabilidad de que una máquina no funcionara en un día dado es de 0.104 la cual la identificó como “p” (probabilidad de que un evento de interés ocurra). Con 250 días laborables al año (que identificó como n) se esperaría que durante 26 días (n*p) la máquina no esté funcionando.

Considerando que las dos máquinas son similares tomó como supuestos que el estado de las máquinas en un día dado podría considerarse como una prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito 0.104 y probabilidad de fracaso de 0.896, además que el funcionamiento de cada máquina era independiente del de la otra. Así que la situación de las dos máquinas se asociar a la repetición de dos pruebas independientes de Bernoulli y el número de máquinas que no funcionan en un día cualquiera es una variable aleatoria Binomial con n = 2, p = 0.104 y q= 0.896 con la distribución de probabilidades siguiente.

Probabilidad que las dos funcionen	0.803
Probabilidad una funcione	0.186
Probabilidad ninguna funcione	0.011

Se espera que las dos máquinas están funcionado 201 días al año, una de las máquinas 46 días y ninguna 3 días.

Nancy calculó el costo promedio de servicio en $68 con una desviación de $1.3 que consideró poco significativa para su análisis, así que considerará solo el valor promedio como criterio de decisión.

La estimación del costo para la compañía del tiempo sin funcionar las máquinas fue un poco más difícil. Lázaro y Nancy decidieron que una medida razonable sería de $0.50 por copia por el número de copias pérdidas cuando no funcionan bien las máquinas, el número promedio de copias estimado fue de 150 diarias cuando no funcionan las dos máquinas y 60 cuando funciona solo una.

Así que durante un año se tendrían los siguientes costos, si seguían trabajando como lo hacen actualmente.

Copias perdidas	Costo por copia $	Costo total por copias $
3210	0.5	1605

Servicios al año	Costo del servicio $	Costo Total de servicio $
98	68	6664

El costo anual para la compañía es de $8269.00.

A continuación Nancy le hizo un bosquejo a Lázaro de las otras opciones. Primera hay una compañía que renta dos fotocopiadoras por $350 mensuales. Afirman que la probabilidad de que una de sus máquinas se descomponga en cualquier día es 0.05 con datos que se comprueban. Además el servició está incluido en el precio.

Las probabilidades para esta situación respecto al estado de las máquinas son

Probabilidad que las dos funcionen	0.903
Probabilidad una funcione	0.095
Probabilidad ninguna funcione	0.003

Las dos máquinas funcionarían durante 226 días al año, una durante 23 días y ninguna durante 1 día.

Costos de funcionamiento de las fotocopiadoras, si se implementa la primera opción

Renta mensual $	Renta al año $
350	4200

Copias perdidas	Costo por copia $	Costo total por copias $
1530	0.5	765

El costo total es de $4965 al año.

Nancy dijo, como segunda opción, tenemos la oportunidad de adquirir una nueva máquina el modelo más reciente que sustituiría a las dos máquinas. El costo inicial es de $8750 y tiene garantía de un año durante el cual el servicio a la máquina es gratis.

He estado investigando y he determinado que podemos esperar un costo de $175 por servicio después del año de garantía. Esto puede sonar caro, pero tendíamos que tomar en cuenta que la máquina es bastante confiable solamente una probabilidad de 0.017 que se descomponga en un día cualquiera esperándose entonces que se necesiten 4 servicios al año.

Utilizando un periodo de 3 años para comparación e ignorando el valor temporal del dinero y el desgaste de las máquinas se calcula que:

En el estado actual la compañía espera gastar $24807. Lo que resulta, claro está, muy oneroso.

Con la primera alternativa durante los tres años tiene un costo esperado de $14895.

Para la segunda opción se tiene un desembolso inicial de $8750 y un costo se servicio de $1400 (ocho servicios en los dos años fuera de garantía a $175 cada uno). Esto equivale a un costo $10150.

Así que la mejor opción para la compañía, dijo Nancy es adquirir la máquina de modelo reciente.

****

1. Introducción

Como se apuntó anteriormente, el comportamiento de una variable aleatoria queda descrito por una distribución de probabilidades o una función de densidad de probabilidad, sean estas discretas o continuas. Con frecuencia las observaciones que se generan de diferentes experimentos estadísticos tienen similar comportamiento, aunque sus parámetros sean distintos, en consecuencia, las variables aleatorias asociadas a estos experimentos se pueden describir esencialmente con un mismo modelo de distribución. Así, es suficiente conocer algunos modelos de distribuciones de probabilidad importantes para describir muchas variables aleatorias que se encuentran en la práctica.

A continuación se presentan estas distribuciones que con mayor frecuencia se utilizan para modelar las variables aleatorias Discretas y el cálculo de probabilidades de los eventos se ilustran por medio de las funciones de Excel, en el apéndice 1 se detalla esta aplicación.

2. Distribución Discreta Uniforme

Es la más sencilla de todas las distribuciones, en ella cada uno de los valores de la variable aleatoria tienen idéntica probabilidad de ocurrir.

Sea X una variable aleatoria Uniforme con recorrido: Rx $\{x_1, x_2, x_3,.. x_k\}$, su distribución de probabilidades está dada por $P(X= x_i) = 1/k$

La media y la varianza de la distribución son respectivamente,

$\mu = (\Sigma x_i) /k$ $\sigma^2 = (\Sigma (x_i - \mu)^2) /k$

Ejemplo:

4.1. Para un número de lotería premiado, se selecciona el valor del premio mediante la selección de una etiqueta al azar de una caja que contiene 10 numeradas del 1 al 10, el valor de la etiqueta es la cantidad de quetzales que corresponden al premio
¿Cuál es la probabilidad de gane menos de 4 quetzales?

Variable Aleatoria:
X es la variable aleatoria que identifica el premio ganado, asociado a él, el número seleccionado:

Recorrido:
$Rx = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Distribución de probabilidad
$P(X= x_i) = 1/ 10 \quad i = 1, 2, 3,\ldots 10$

$P (X< 4) = P(X=1) + =(X=2) + P(X=3) = 3/10$

Esperanza y Varianza
$E(X) = (1 +2 +3+ 4+ 5+ 6+ 7\ 8+ 9+10) / 10 = 5.5$

$V(X) = [(1 - 5.5)^2 + (2 - 5.5)^2 + (3 - 5.5)^2 + (4 - 5.5)^2 + (5 - 5.5)^2 + (6 - 5.5)^2 + (7 - 5.5)^2 + (8 - 5.5)^2 + (9 - 5.5)^2 + (10 - 5.5)^2]/ 10 = 8.25$

Resuelva:

4.2. El gerente de una pastelería sabe que el número de pasteles de chocolate que puede vender en un día dado es una variable aleatoria con distribución de probabilidades uniforme discreta para X igual a 0, 1, 2, 3, 4 y 5.
Además sabe que logra una utilidad de un quetzal por cada pastel vendido y una pérdida de 0.4 quetzales por cada pastel que no venda. Se supone que no hay pérdida por faltantes y que cada pastel solo se puede vender el día de su producción. Determine la utilidad esperada en un día en que hornea tres pasteles y la desviación estándar que corresponde a la variable en cuestión.
R: 1.6, 1.615

3. Distribución Binomial

La prueba de Bernoulli:

Un experimento se denomina Prueba de Bernoulli si su espacio muestral incluye únicamente dos sucesos mutuamente excluyentes.

Este tipo de pruebas se presenta en aquellos experimentos cuyos resultados son eventos dicotómicos y se identifican como éxito y fracaso. A su vez las probabilidades de esos eventos son conocidos señalándose como p, probabilidad de éxito, y q, probabilidad de fracaso.

El proceso de Bernoulli:
Se denomina proceso de Bernoulli al experimento que presenta las siguientes propiedades:

1. Se repite n veces una Prueba de Bernoulli.

2. Cada prueba produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso con probabilidad p y q respectivamente.

3. Las probabilidades de éxito y fracaso permanecen constante en cada prueba.

4. Las pruebas se consideran cada una independiente de las anteriores.

Como resultado de este proceso se define la variable aleatoria X: Número de éxitos que aparecen al efectuar n pruebas. X es una variable Aleatoria con Distribución Binomial:

$$Rx = \{0, 1, 2, 3..... n\}$$

$$P(X= k) = {}_nC_k * p^k q^{(n-k)}$$

$$E(X) = n * p \qquad V(X) = n *p *q$$

X = k solo si en las n repeticiones aparecen exactamente k éxitos y por lo tanto (n-k) fracasos

Ejemplo:

4.3. Se lanzan 6 monedas legales, construya la distribución de probabilidades de la Variable aleatoria X = número de caras que aparecen en los 6 lanzamientos.

Prueba de Bernoulli: Lanzamiento de una Moneda.
Asociando: Éxito = Cara, Fracaso = Escudo y p = q = 0.5

Variable Aleatoria:
X= Número de éxitos que aparecen al repetir 6 veces la prueba de Bernoulli.

X es una variable aleatoria con distribución Binomial con n= 6, p = q = 0.5

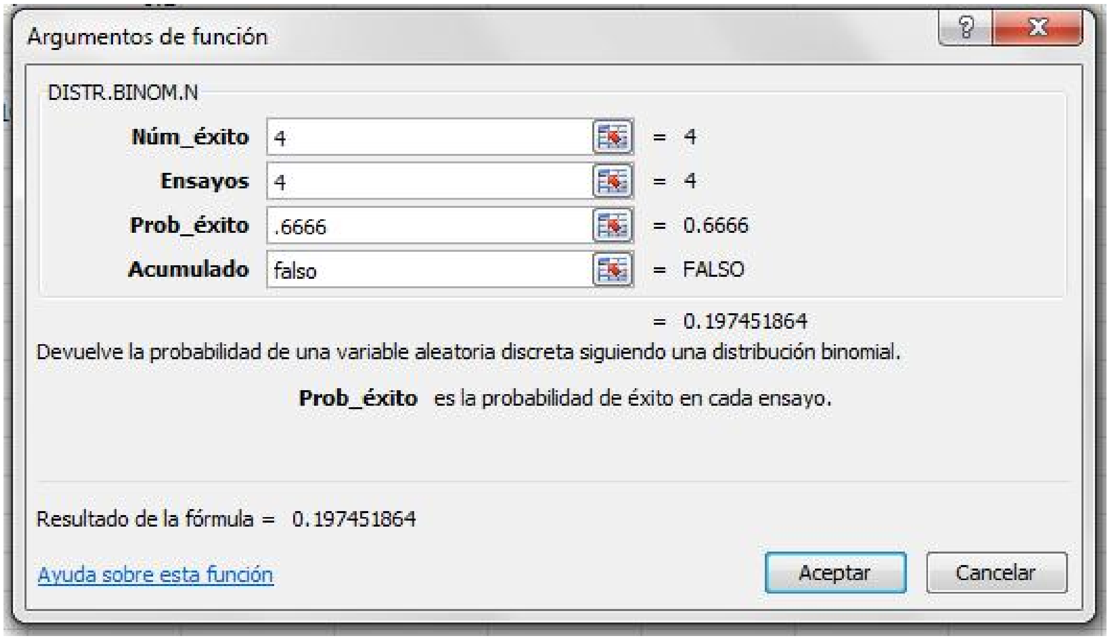
Recorrido:
Rx= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Distribución de Probabilidades:
$P(X= k)= {}_6C_k\, p^k\, q^{(6-k)}$
Para construir la distribución de probabilidades se calcula P(X= k) para todo valor posible de k, por ejemplo: $P(X = 2) = {}_6C_2\, p^2\, q^{(6-2)} = 0.23437$

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
P(X)	0.01563	0.09375	0.23437	0.3125	0.23437	0.09375	0.01563

Esperanza y Varianza
E(X) = 6* 0.5 = 3   V(X) = 6*0.5*0.5= 1.5

4.4 Un floricultor afirma que 2/3 de su cosecha de duraznos está contaminada con una clase de insectos Encuentre la probabilidad de que entre 4 duraznos seleccionados al azar los 4 estén contaminados



P(X = 4) 4C4 (2/3)4 (1/3) = 0.1976

Resuelva

4.5 Se supone que el 10% de los vasos fabricados por determinada máquina tienen algún tipo de defecto, si se seleccionan al azar 10 de estos vasos, cuál es la probabilidad de encontrar menos de tres defectuosos. R: 0.9278
¿Cuántos vasos defectuosos esperaría encontrar en la muestra de 10?
R: 1

4. Distribución Binomial Negativa o Distribución Pascal

Considere una variante del experimento de Bernoulli, en el cual se realizan pruebas independientes hasta que un éxito aparece por r-ésima vez. Esto es la prueba se repite hasta que ocurra un número fijo (r) de éxitos.

La variable aleatoria Y se define como el número de veces que se realiza la prueba, Y, tiene una distribución Binomial Negativa con:

Rz = {r, r+1, r+2.......,}

$P(Z = k) = {}_{k-1}C_{r-1}\, p^{r} q^{k-r}$

$E(Z) = r/p \quad V(Z) = rq/p^2$

Y= k si exactamente el r-ésimo éxito ocurre en la k-ésima prueba y en consecuencia (r-1) éxitos ocurrieron en las anteriores k-1 pruebas.

Ejemplo:

4.6. Suponga que una compañía que fabrica tarjetas electrónicas, según su experiencia, considera que la probabilidad de que cualquiera de las tarjetas producidas esté defectuosa es 1 %. ¿Cuál es la probabilidad de tener que examinar menos de seis para encontrar tres tarjetas en buenas condiciones?

Prueba de Bernoulli: Selección e inspección una a una las tarjetas electrónicas.
Éxito: la tarjeta se fabricó en buenas condiciones
Fracaso: tarjeta es defectuosa
p= 0.99 q= 0.01

Variable aleatoria:
Y= número de tarjetas examinadas hasta encontrar tres en buenas condiciones, r = 3.
Recorrido:
Rz = {3, 4, 5, 6, ...}

Distribución de probabilidades
$P (Z = k) = {}_{k-1}C_{3-1}\, p^{r} q^{3-r}$

$P (Z < 6) = P(Z= 3) +P(Z= 4) +P(Z= 5)$

$P (Z < 6) = {}_2C_2\, 0.99^{3} * 0.01^{0} + {}_3C_2\, 0.99^{3} * 0.01^{1} + {}_4C_2\, 0.99^{3} * 0.01^{2}$
= 0.9998

Esperanza y varianza
$E (Z) = 3/ 0.99 = 3.03$ $V (Z) = 3* 0.01/ 0.99^{2} = 0.0306$

4.7 La probabilidad de que una persona que vive en cierta ciudad tenga un perro se estima en 0.3. Determine la probabilidad que la décima persona entrevistada al azar en dicha ciudad sea la 5 en contestar que tiene un perro.

Sea $p = 0.3$ $q = 0.7$ $r = 5$

$P(Y = 10) = {}_{10-1}C_{5-1}\, 0.3^5\, 0.7^5 = 0.05146$

Resuelva

4.8 Se examinan empleados de un negocio de fabricación de aislantes para determinar si hay asbesto en sus pulmones. Se pide a la empresa que mande a 3 empleados cuyos resultados fueron positivos a un centro médico. Si el 40 % de los empleados tiene resultados positivos. Calcule la probabilidad de que se debe examinar 10 empleados para encontrar 3 casos con asbesto en sus pulmones. R: 0.0645

Si cada examen cuesta Q20 calcule el valor esperado y la varianza del total de llevar a cabo pruebas para encontrar 3 empleados con resultados positivos.
R: 150, 4500

5. Distribución Geométrica

Suponga que se realiza un experimento que conduce a repetir pruebas independientes de Bernoulli con parámetros p y q, probabilidades de éxito y fracaso respectivamente.

Se define la variable aleatoria Y como el número de pruebas que se repiten hasta encontrar el primer éxito, Y tiene una distribución geométrica con:

$R_y = \{1, 2, 3, 4 ......\}$

$P(Y = k) = q^{k-1}\, p$

$E(Y) = 1/p \qquad V(Y) = q / p^2$

Es de hacer notar que la distribución Geométrica se puede considerar un caso especial de la distribución Binomial Negativa con r=1.

Ejemplo:

4.9. Hallar la probabilidad que en lanzamientos sucesivos de un dado resulte un dos por primera vez en el quinto lanzamiento.

Prueba de Bernoulli: Cada lanzamiento del dado.
Éxito: aparece el número 2.
Fracaso: Aparece un número diferente del 2
p= 1/6 q=5/6
Variable aleatoria:

Y= Número de lanzamientos que se efectúan hasta encontrar un número dos por primera vez.

Recorrido:

$R_y = \{1, 2, 3, 4....\}$

Distribución de probabilidad

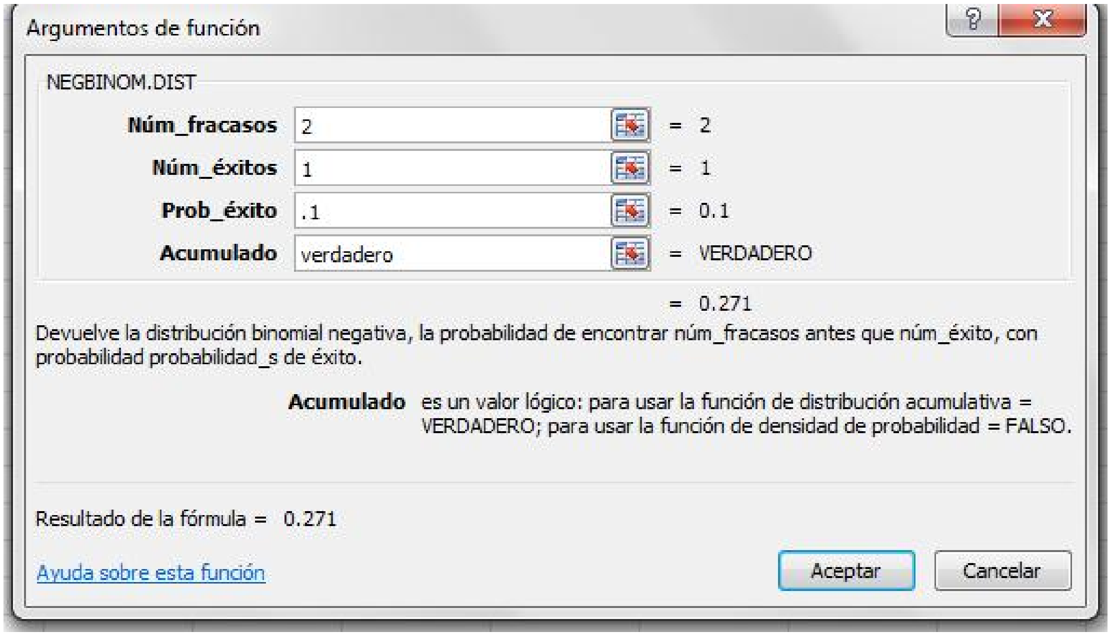
$P(Y = k) = q^{k-1}\, p$

$P(Y=5) = (5/6)^4 * (1/6) = 0 .0804$

Esperanza y varianza

$E(Y) = 1/(1/6) = 6 \qquad V(Y) = (5/6)/(1/6)^2 = 30$

4.10 Suponga que 1 de cada 10 copias del diario prensa libre lleva impreso un número especial con el cual se obtiene un premio. ¿Cuál es la probabilidad de tener que comprar menos de 4 periódicos para ganar un premio?



Sea p = 0.1 q = 0.9 P (Z = k) = p k-1 * q
P (Z < 4) = P (Z = 1,2, 3) = 0.9 0 *0.1 + 0.9 *0.1 * 0.9 2 * 0.1 = 0.271

Resuelva:

4.11 La probabilidad de que un estudiante de aviación pase la prueba escrita para obtener su licencia de piloto privado es 0.7. Encuentre la probabilidad de que una persona: A) pase la prueba en el tercer intento. B) La probabilidad de que pase la prueba antes del cuarto intento.
R: 0.063, 0.973

6. Distribución Multinomial

La distribución Multinomial generaliza a la distribución binomial, cuando el experimento presenta k diferentes resultados.

La prueba Multinomial
Si en un experimento se define un espacio muestral que incluye K sucesos mutuamente excluyentes y a su vez las probabilidades de estos eventos son conocidos, este experimento se denomina Prueba Multinomial.

El proceso Multinomial

Se denomina proceso Multinomial al experimento que presenta las siguientes propiedades:

1. En una prueba multinomial con espacio muestral asociado (S), existe una partición de k sucesos excluyentes: A_1, A_2, A_3 .....A_k, que ocurren con probabilidad p_1, p_2, p_3,... p_i,.... p_k, de tal forma que cuando se efectúa ocurre solo uno de esos resultados.
2. Se repite n veces la prueba Multinomial.
3. Las probabilidades de los sucesos permanecen constantes en cada una de las pruebas.
4. Las pruebas se consideran cada una independiente de las anteriores.

Como resultado de este proceso se define una serie de variables Xi como el número de veces que aparece el suceso Ai en las n repeticiones del experimento (i= 1, 2, …k):

X_1 = Número de veces que aparece el suceso A_1
X_2 = Número de veces que parece el suceso A_2
X_i = Número de veces que aparece el suceso A_i
X_k = Número de veces que aparece el suceso A_k

El conjunto de variables aleatorias (X_1, X_2, X_3,...X_k) tiene una distribución Multinomial, con:

Rx_i= {0, 1, 2, 3...n}

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \ldots . n_k!} * p_1^{n_1} * p_2^{n_2} * \ldots . p_k^{n_k}$$

$E(x_i) = n * p_i$ $V(x_i) = n * p_i * (1 - p_i)$

Sujeto a las restricciones:

$\Sigma p_i = 1$ $0 \leq p_i \leq 1$ $\Sigma n_i = n$

Ejemplo:

4.12 Se lanza un dado normal 6 veces, hallar la probabilidad que se encuentre exactamente un número dos, dos números tres, dos números cuatro y un número seis.

Se definen los sucesos siguientes:
A_1, es el suceso “aparece el número 1”
A_2, es el suceso “aparece el número 2”
A_3, es el suceso “aparece el número 3”
A_4, es el suceso “aparece el número 4”
A_5, es el suceso “aparece el número 5”
A_6, es el suceso “aparece el número 6”

Sean Xi las variables definidas como:

X_1 = Número de veces que aparece el 1
X_2 = Número de veces que aparece el 2
X_i = Número de veces que aparece el número i , i= 1,2,3,4,5,6

$p_i = 1/6$ i= 1,2,3,4,5,6

$P(X_1= 0, X_2 =1, X_3=2, X_4= 2, X_5=0 , X_6= 1) =(6!/ (1!*2!*2!*1!)) * (1/6)^6 = 0.0038$

4.13 Suponga que la probabilidad de que cierto foco dure 500 horas o menos es 0.5 , de que dure más de 500 pero menos de 800 horas es 0.3 y que dure más de 800 es 0.2

Si se tienen 10 focos y se desea saber la probabilidad de que 4 duren menos de 500 horas otros 4 entre 500 y 800 horas y 2 más de 800 horas se tiene

p_1= 0.5 p_2= 0.3 p_3=0.2

x_1 = el número de focos que duran menos de 500
x_2 = el número de focos que duran entre 500 y 800
x_3 = el número de focos que duran más de 800

$P(x_1=4, x_2= 4\ X_3= 2) = 10! / (4!\ 4!\ 2!) * 0.5\ 4 * 0.3\ 4 * 0.2\ 2 = 0.0637$

Resuelva

4.14 Los usuarios que salen de una estación de tren subterránea pueden pasar por cualquiera de tres puertas (A, B y C). Si se supone igual probabilidad que cualquier usuario seleccione cualquiera de las tres puertas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 4 personas:

A. dos seleccionen la puerta A, 1 la puerta B y 1 la puerta C? R: 4/27
B. las cuatro utilicen la misma puerta?
C. se usen las tres puertas para la salida de las personas? R: 4/9

7. Distribución Hipergeométrica

Considere un conjunto de N artículos de los cuales r poseen una característica particular A y por tanto (N-r) no la poseen (A^c). Esto es los artículos se clasifican formando una partición del espacio muestral (A, A^c).

Si el experimento consiste en elegir al azar n artículos sin sustitución y X es la Variable Aleatoria: Número de artículos elegidos que poseen la característica A, entonces X tienen una distribución Hipergeométrica con:

Rx= {0,1, 2, 3.. k....n} si $n \leq r$

Rx = {0, 1, 2,...k...r} si n > r

X toma el valor de k si y solo si hay exactamente k elementos con la característica A y n-k con la característica A^c.

$$P(X=k) = \frac{{}_{r}C_{k} * {}_{N-r}C_{n-k}}{{}_{N}C_{n}}$$

E(X) = n*r/N V(X) =(n*r/N)* ((N-r)/N)* ((N-n)/(N-1))

Ejemplo:

De 20 aspirantes a una beca, 12 son guatemaltecos (A) y los demás de otros países de Centro América (A^c). Si se seleccionan al azar 6 aspirantes a la beca., la probabilidad de que no más de dos sean guatemaltecos (A) es:

Variable Aleatoria:
X es la variable número de guatemaltecos seleccionados
Recorrido
Rx= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Distribución de probabilidades

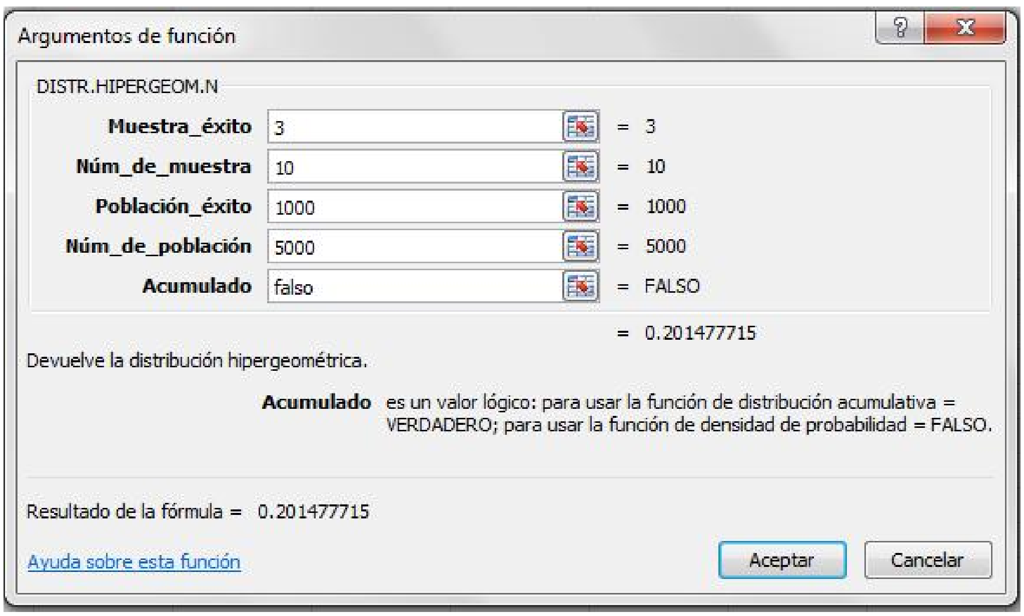
$N= 20 \quad n= 6 \quad r=12 \quad N-r= 8$

$$P(X=k) = \frac{{}_{12}C_k * {}_{8}C_{n-k}}{{}_{20}C_6}$$

$P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$P(X \leq 2) = \frac{{}_{12}C_0 * {}_{8}C_6}{{}_{20}C_6} + \frac{{}_{12}C_1 * {}_{8}C_5}{{}_{20}C_6} + \frac{{}_{12}C_2 * {}_{8}C_4}{{}_{20}C_6} = 0.1373$$

4.17 Un fabricante de neumáticos para autos informa que en un envío de 5000 llantas dirigidas a un proveedor local 1000 están ligeramente dañadas. Si se compra al distribuidor 10 llantas al azar ¿cuál es la probabilidad que exactamente 3 estén dañadas?



$$P(X=3) = \frac{{}_{4000}C_7 * {}_{1000}C_3}{{}_{5000}C_{10}} = 0.20147$$

Resuelva:

4.16 De un grupo de 20 ingenieros se eligen 10 aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los 10 seleccionados estén las 5 mujeres que pertenecen al grupo?
R: 0.0162

La distribución Hipergeométrica puede generalizarse cuando el espacio muestral está dividido en una partición de más de dos clases

Considere N artículos que se pueden dividir en j clases, $A_1, A_2, ...A_j$, con $r_1, r_2, ...r_j$ elementos respectivamente.

$$\Sigma r_i = N$$

Sean las variables aleatorias : $X_1, X_2 ....X_j$, que representan el número de elementos seleccionados de la clase $A_1, A_2, ...A_j$ en una muestra de n artículos, entonces la distribución conjunta de las variables aleatorias es Hipergeométrica :

$$P(X_1= x_1, X_2= x_2, ... X_j = x_j) = [r_1C x_1 * r_2C x_2 ....* r_j C x_j] / NCn$$

$\Sigma x_i = n$ i=1,2,3...j

Ejemplo:

4.18. Un grupo de 10 personas se clasifica de acuerdo a su profesión, 3 Ingenieros (A_1), 4 Biólogos (A_2) y 3 Administradores (A_3). La probabilidad de que una muestra aleatoria de 5 personas contenga un ingeniero, dos biólogos y dos administradores es:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2) = [{}_3C1 * {}_4C_2 * {}_3C_2] / 10C5 = 3/14$$

N=10 n= 5 $r_1 = 3$ $r_2 = 4$ $r_3 = 3$

4.19 Un lote consta de 10 artículos buenos 4 con pequeños defectos y 2 de defectos graves
a. Si se elige un artículo al azar, cuál es la probabilidad de que no tenga defectos.
P(A) = 10/16

b. Si se extraen al azar cuál es la probabilidad de que dos sean con defectos graves

$P(X_1= 0, X_2= 1\ X_3 = 2) + P(X_1 = 1\ X_2= 0\ X_3= 2) =$
$({}_{10}C_0\ {}_4C_1\ \ {}_2C_2 + {}_{10}C_1\ {}_4C_0\ {}_2C_2) / {}_{16}C_3 = 0.025$

Otra forma
${}_{14}C_1\ {}_2C_2 / {}_{16}C_3 = 0.025$

Resuelva

4.20 De un juego de naipes de 52 cartas se extraen 5 cartas. Determine la probabilidad de extraer dos ases, dos reyes y cualquier otra carta.
R: 0.00060947

8. Distribución de Poisson

La distribución de Poisson se presenta frecuentemente en situaciones donde un evento ocurre aleatoriamente en un intervalo de tiempo, (distancia, área o volumen). Por ejemplo, las llegadas de los vehículos a una estación de gasolina ocurren aleatoriamente durante el tiempo de atención, los defectos en una hoja impresa ocurren aleatoriamente en la superficie de la misma

Estos experimentos dan lugar a una variable aleatoria Y, definida como el número de eventos que ocurren durante un intervalo continuo dado y se llaman experimentos de Poisson; la variable asociada se denomina Variable Aleatoria de Poisson.

Experimentos de Poisson:

Los eventos discretos se generan en un intervalo continuo en un Proceso de Poisson con parámetro λ con las siguientes propiedades.

I. La ocurrencia del evento de interés en un periodo cualquiera es independiente de la ocurrencia de los eventos en otros periodos no traslapados de igual longitud. De esta forma el proceso de Poisson no tiene memoria.

II. La probabilidad que ocurra un evento durante un intervalo muy corto es proporcional a la longitud del intervalo y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo, así mismo es independiente de su localización.

III. En un intervalo T suficientemente corto, la probabilidad de exactamente una ocurrencia en ese intervalo es λT y tiende a cero. La probabilidad de que ocurra más de un resultado en el intervalo es insignificante. La probabilidad de ninguna ocurrencia en el intervalo es $1 - \lambda T$.

El parámetro λ se conoce como intensidad de la distribución o tasa de ocurrencia y es el número promedio de eventos que ocurren en un intervalo unitario.

Distribución de Poisson:

Considere el experimento que consiste en observar un proceso de Poisson con parámetro λ durante s unidades de tiempo.

Sea Y la Variable Aleatoria, Número de eventos que ocurren en ese intervalo, entonces Y es una variable con distribución de probabilidades de Poisson con parámetro $\lambda * s$, donde:

$R_y = \{ 0,1,2,3........\}$

$P(Y= k) = e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k} / k!$

$E(Y) = \lambda s$ $\qquad$ $V(Y) = \lambda s$

Ejemplo:

4.21. Los clientes en un supermercado se forman en la caja a razón de 4 por minuto de acuerdo a un proceso de Poisson (λ = 4 clientes / minuto). La probabilidad de que por lo menos un cliente se forme en dicha cola en cualquier periodo de 30 segundos se calcula de la forma siguiente:

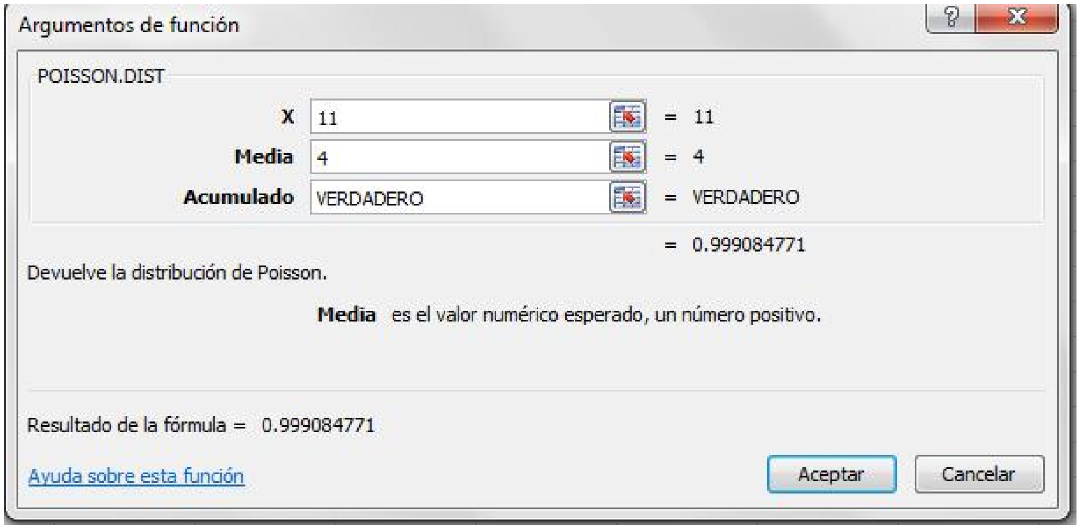
Y= Número de clientes que se forman en la cola durante un periodo de 30 segundos (0.5 minutos)
λ = 4 clientes / minuto $\qquad$ S = 0.5 minutos $\qquad$ $\lambda S = 2$

$E(Y) = 2$ $\qquad$ $V(Y) = 2$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-2} (2)^{0} / 0! = 0.865$

4.22. El número de automóviles que pasan por una calle en busca de estacionamiento es una variable con distribución de Poisson con promedio 4 autos por hora. La calle tiene lugar solo para 12 vehículos y está vacío al principio del periodo (hora). Cuál es la probabilidad de que la calle se llene durante la primera hora. Suponga que los vehículos permanecen en el estacionamiento más de 1 hora

Probabilidad de que se llene es que lleguen doce o más autos en una hora



$P(x >= 12) = 1 - P(x <= 11) = 1 - \Sigma_x e^{-4} * 4^x / x!$ Variando x de 0 a 11
1- 0.999= 0.001

Resuelva:

4.23 El número de imperfecciones en el tejido de una tela tiene una distribución de Poisson con promedio de 4 imperfecciones por yarda cuadrada.
Calcule la probabilidad de que una muestra de 1 yarda cuadrada tenga por lo menos un defecto. R: 0.98168
Calcule la probabilidad de que una muestra de tres yardas cuadradas tenga un defecto. R:7.37 E -5

Distribución de Poisson como forma limitante de la Distribución Binomial

En el caso de la Distribución Binomial, si n tiende al infinito, y p es pequeña, tiende a cero, las condiciones simulan un espacio continuo del proceso de Poisson que es básicamente consistente con las propiedades de este: independencia, p cercano a cero. Entonces es posible concluir que para X, una variable aleatoria Binomial, la distribución de probabilidades puede aproximarse a una distribución de Poisson:

$P(X=k) = e^{-np} (np)^k / k!$ k= 0,1,2,3.....n

Ejemplo:

4.24. Se sabe que en determinada carretera existe un 3% de probabilidad de que un automovilista se accidente. Suponiendo que la probabilidad de que un auto se accidente es independiente de otro y permanece constante, la probabilidad de que de los primeros 300 autos que pase por el lugar a lo más uno se accidente es:

X= Número de autos accidentados, entre 300 autos que pasan por el lugar.

X es una variable aleatoria Binomial con: $n = 300$ $p= 0.03$ $q= 0.97$
Si n es considerada grande y p tendiendo a cero, bajo los supuestos anteriores, la probabilidad de X se puede aproximar por el modelo de Poisson con np= 300*0.03= 9

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$P (X \leq 1) = e^{-9} (9)^{0} / 0 ! + e^{-9} (9)^{1} / 1 ! = 0.00123$

Resuelva

4.25 Suponga que la probabilidad de cometer un error numérico al elaborar una declaración de impuestos es 0.001. Si se seleccionan al azar 10000 declaraciones para auditar, cuál es la probabilidad de que 6 o 7 tengan error,
R: 0.15307

9. Problemas resueltos

4.26 Suponga que de un lote de 300 fusibles electrónicos que contiene 15 defectuosos se seleccionan 5 al azar. La probabilidad de encontrar al menos uno defectuoso es:

$N= 300$ $n = 5$ $r= 15$ $N-r = 285$

X es la variable número de fusibles defectuosos encontrados en la muestra.
X tiene una distribución Hipergeométrica,
$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - [{}_{285}C_5 * {}_{15}C_0 / {}_{300}C_5]$
$P(X \geq 1) = 1- 0.7724 = 0.2275$

4.27 Suponga que la probabilidad de que un motor falle durante cualquier periodo de trabajo es 0.02, La probabilidad de encontrar dicho motor funcionando adecuadamente durante dos periodos de trabajo como mínimo se determina de la forma siguiente:

Y es la Variable aleatoria "Número de periodos de trabajo hasta la primera falla".

Y es una variable geométrica con p = 0.02

$P(Y \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.02 - (0.98*0.02) = 0.9604$

4.28 Un proveedor de equipo pesado ha encontrado que los clientes nuevos se obtienen normalmente mediante llamadas telefónicas de compra que ellos mismos hacen, la probabilidad que en la llamada se concrete la venta de un equipo es 0.3. Si el proveedor tiene 3 piezas listas para su venta, ¿ cuál es la probabilidad de tener menos de 5 entrevistas con clientes para terminar con el inventario?.

Z es la variable aleatoria: Número de entrevistas necesarias para vender 3 equipos,

Z es una variable Binomial Negativa con p = 0.3 q= 0.7 r = 3

$P(Z<5) = P(Z=3) + P(Z=4) = {}_{3\text{-}1}C_{3\text{-}1} * p^3 * q^0 + {}_{4\text{-}1}C_{3\text{-}1} * p^3 * q^1 = 0.0837$

¿Cuántas llamadas en promedio deben efectuarse para lograr vender los 3 equipos?

E(Z) = 3/ 0.3 = 10

4.29 Un puerto tiene capacidad para acomodar 4 naves de cierto tipo durante la noche, las tarifas del puerto producen una utilidad de Q1000 por nave atracada por noche.

Si X es la variable aleatoria que representa el número de naves llegando al atracadero y P(X= k) =1/6 para k= 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	176

Además Y representa la utilidad obtenida por las naves atracadas durante la noche, encuentre la distribución de probabilidades y el valor esperado de Y.

$Y = 1000X$ si $0 \leq X \leq 4$

$Y = 4000$ si $X > 4$

Y	0	1000	2000	3000	4000
P(Y)	1/6	1/6	1/6	1/6	2/6

$E(Y) = 2333.33$

4.30 Cierto tipo de árboles tienen retoños dispersos de forma aleatoria sobre un área extensa con una densidad promedio de 5 retoños por metro cuadrado. La probabilidad de que un guardabosque que selecciona al azar una porción de 10 metros cuadrados de esa área no encuentre retoños de ese tipo de árbol es:
Bajo el supuesto que le número de retoños por metro cuadrado es una variable aleatoria de Poisson se define a X como el número de retoños en una porción de 10 metros cuadrados.

$\lambda = 5 \quad \lambda S = 50$

$P(X = 0) = e^{-50} (50)^{0} / 0! = 1.93\ E\text{-}22$

4.31 De acuerdo con los datos ajustados en 2014 las proporciones de adultos clasificados en 5 categorías de edad son:

18 a24 años	0.18
25 a 34 años	0.23
35 a 44 años	0.16
45 a 64 años	0.27
65 años o más	0.16

Si se seleccionan al azar 5 adultos, la probabilidad de que en la muestra se incluya una persona entre 18 y 24 años, 2 personas entre 25 y 34 años y 2 personas entre 45 y 64 años es.

Xi es la variable aleatoria número de personas incluidas en la muestra que pertenecen a la categoría i (i= 1,2,3,4,5)

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ Es un conjunto de variables con distribución Multinomial

$N = 5 \quad p_1 = 0.18, \quad p_2 = 0.23, \quad p_3 = 0.16, \quad p_4 = 0.27, p_5 = 0.16$

$P(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 2, X_5 = 0) =$

$[5! / (1!*2!*2!)]\ 0.18*0.23^2*0.27^2 = 0.0208$

4.32 Sea X la variable aleatoria que denota el número de veces que hay que arrojar un dado para que aparezca un #2 o un #3 por primera vez, encuentre la probabilidad de que variable tome el valor de 3.

Probabilidad de Exito = p = probabilidad de un dos o un tres = 1/3

Probabilidad de fracaso = probabilidad no aparece el dos ni el tres

q = 2/3

X= Número de lanzamientos para en encontrar un éxito por primera vez.

$P(X=3) = p\, q^{3-1} = 1/3 * (2/3)^{2} = 0.1481$

4.33 La probabilidad de dar en el blanco en un lanzamiento es 0.7, si hacen ensayos hasta que exactamente han ocurrido 3 lanzamientos exitosos, ¿cuál es la probabilidad que sean necesarios menos de 5 intentos?

r = 3 éxitos

Probabilidad de dar en el blanco = p = 0.7

Probabilidad de no dar en el blanco = q = 0.3

Z = el número de lanzamientos necesarios para tener 3 éxitos.

Rz = { 3, 4, 5......}

$P(z < 5) = P (3) + P (4) = {}_{3\text{-}1}C_{3\text{-}1}\, 0.7^{3}\, 0.3^{0} + {}_{4\text{-}1}C_{3\text{-}1}\, 0.7^{3}\, 0.3^{1}$

$P(z < 5) = 0.343 + 0.3087 = 0.6517$

4.34 Entre las personas que donan sangre en una clínica el 80% tienen factor Rh positivo. Cinco personas donan sangre en un determinado días, ¿cuál es la probabilidad que:

a. Cuando mucho 4 de los 5 tengan sangre Rh positivo?

X= Número de donadores con factor Rh positivo

$P(X \leq 4) = 1\text{-} P(X = 5) = 1 - {}_5C_5\, 0.8^{5}\, 0.2^{0} = 1\text{-}0.32768\text{-}= 0.6723$

b. Exactamente dos tengan sangre Rh positivo?

$P(X =2) = {}_5C_2\, 0.8^{2}\, 0.2^{3} =0.0512$

4.35 Se empacan 10 motores para su venta en un almacén, los motores se venden a $100 cada uno, la compañía se compromete a devolver el doble del valor por cada motor si este es defectuoso.

Calcular la ganancia neta esperada por el vendedor si la probabilidad de que cualquier motor esté defectuosos es 0.08

Ganancia = 10 * 100 - 200 X

X = número de motores defectuosos

$E(X) = np = 10 * 0.08 = 0.8$

$E(G) = E (1000\text{-}200X) = 1000\text{-} 200E(X) = 1000\text{-} 200(0.8) = 840$

4.36 Los usuarios que salen de una estación de tren subterránea pueden pasar por cualquiera de tres puertas. Si se supone igual probabilidad que el usuario seleccione cualquiera de las tres puertas, ¿cual es la probabilidad de que entre 4 personas:

a. 2 seleccionen la puerta A, 1 la puerta B y 1 la puerta C (suceso A) ?

b. los cuatro utilicen la misma puerta (suceso B)?

c. se usen las tres puertas para la salida de las personas (suceso C)?

Sea X_1 el número de personas que eligen la puerta A, X_2, el número de personas que eligen la puerta B y X_3 el número de personas que eligen la puerta C

$P(A)= P(4, 2,1,1) = (4! / 2!\ 1!\ 1!)\ 0.333^2 *0.333* 0.333 = 4/27$

$P(B) = P(4, 4, 0, 0) + P(4, 0, 4, 0) + P(4, 0, 0. 4) =$
$(4!/ 4!) * 0.3333^4 *3 = 1/3$

$P(C) = P(4, 2, 1, 1) + P(4, 1,2, 1) + P(4, 1, 1, 2)= 4/9$

4.37 En un almacén hay 8 neumáticos R13, dos de ellos tienen algún tipo de daño. Si se seleccionan cuatro al azar ¿cuál es la probabilidad que se encuentren los dos que tienen daño?

X= número de neumáticos con falla seleccionados
$P(X=2) = {}_2C_2\ {}_6C_2 / {}_8C_4 = 15/70 = 0.21428 = 3/14$

4.38 Suponga que las moléculas de un gas raro se encuentran a razón promedio de 3 moléculas por pie cúbico de aire. Si las moléculas están distribuidas independientemente al azar en el aire.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no se encuentren moléculas el gas en una muestra de un pie cúbico?

b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar como máximo una molécula de gas raro en la muestra de un pie cúbico?

X = número de moléculas del gas raro presentes en la muestra
λ = 3 moléculas por pie cúbico

a. $P(X=0) = \exp(-3) *1|/ 0! = 0.05$

b. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.05 + \exp(-3) *3/ 1! =$
$0.05 + 0.149 = 0.199$

c. Si se toman tres muestras cada una de un pie cúbico, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentre no más de una molécula de gas en exactamente dos de las tres muestras?

Y= el número de muestras que tiene como máximo 1 molécula de gas
p= 0.199
$P(Y = 2) = {}_3C_2\ (0.199^2)\ (1-0.199) = 0.0952$

4.39 Suponga que un proveedor, cuya calidad en el pasado ha sido 2% de unidades defectuosas, entrega lotes de 300 unidades de productos, de estos, se selecciona una muestra de 40 unidades ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos unidades defectuosas en la muestra?

X= número de unidades defectuosas en la muestra
p= 0.02 n= 40
$P(X=2) = \exp(-40*0.02) * (40*0.02)^2 / 2! = 0.144$

¿Cuál es la probabilidad que se encuentre a lo más una defectuosa?
$P(X\leq 1) = \exp(-0.8)* 1 / 0! + \exp(-0.8) *0.8 / 1! = 0.449+ 0.3594= 0.808$

4.40 La probabilidad que un radar descubra un avión enemigo es 0.9. Si se cuenta con 5 radares. ¿Cuál es la probabilidad que sean exactamente 4 los que descubran al avión enemigo? Suponga que los radares trabajan independientemente.
X = número de radares que descubren al avión enemigo
p= probabilidad de descubrir al avión enemigo = 0.9

$P(X= 4) = {}_5C_4 *0.9^4 * 0.1 = 0.32805$

¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos uno descubra al avión enemigo?
$P(X \geq 1) = 1- P(X = 0) = 1 - {}_5C_0\, 0.9^0 * 0.1^5 = 0.9999$

¿Cuál es el número esperado de radares que descubren al avión enemigo?
$E(X) = 5* 0.9 = 4.5$

4.41 La tercera parte de las personas que donan sangre en una clínica son del grupo O+. Calcular la probabilidad que el segundo donador O+ sea el cuarto en donar sangre un día específico.
X= número de donadores hasta encontrar el segundo del grupo O+, esto es r=2
$P(X = 4) = {}_{4-1}C_{2-1} * (1/3)^2 * (2/3)^2 = 0.14808$

¿Cuántas personas se espera examinar para encontrar cuatro con sangre O+?
r=4 $E(X) = 4 / (1/3) = 12$

con varianza $V(X) = 4 (2/3) / (1/3)^2 = 24$
y desviación estándar $\sigma = 4.8989$

4.42 Sesenta por ciento de una población de consumidores prefieren la crema dental A. Si se entrevista a un grupo de ellos, ¿cuál es la probabilidad que se tenga que entrevistar exactamente cinco personas, antes de encontrar una que prefiere la marca A?

X= Número de entrevistas que se deben hacer para encontrar uno que prefiera la crema dental A

$P(X=5)= 0.4^4 * 0.6= 0.01536$

¿Cuál es la probabilidad de entrevistar por lo menos 5 personas para encontrar una que prefiere la marca A?

$P(X \geq 5)= 1 -P(X < 5) =1- 0.6 - 0.4 * 0.6 - 0.4^2 * 0.6 - 0.4^3 * 0.6 = 0.0256$

4.43 Una máquina corta barras de aluminio con longitud nominal de 11 pulgadas, con la siguiente distribución de probabilidades.

X	<10.5	10.5 ≤X≤ 11.8	> 11.8
P(X)	0.25	0.65	0.10

Si se compran 10 de tales barras, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 de longitud menor que 10.5 y 2 de longitud mayor que 11.,8

X_1= Número de barras con longitud < 10.5 pulgadas

X_2 = Número de barras con longitud entre 10.5 y 11.8 pulgadas

X_3= Número de barras con longitud mayor que 11.8 pulgadas

$P(X_1=3, X_2= 5, X_3= 2) = [10!/ (3!\ 5!\ 2!)] * 0.25^3 * 0.65^5 * 0.1^2 = 0.04568$

4.44 Se tiene un lote de 50 bombillas y se sabe que 5 de estas son defectuosos, si se extraen cuatro al azar, ¿cuál es la probabilidad que exactamente 2 estén defectuosas?

X= número de bombillas defectuosas seleccionadas.

$P(X=2) = {}_5C_2 * {}_{45}C_2 / {}_{50}C_4 = 0.0429$

También puede aproximarse esta probabilidad utilizando la distribución binomial ya que n/N > 0.1

p = Probabilidad de seleccionar una bombilla defectuosa = 0.1

q = Probabilidad de seleccionar una bombilla no defectuosa = 0.9

$P(X = 2) = {}_4C_2 * 0.1^2 * 0.9^2 = 0.0486$

4.45 El supervisor de una fábrica tiene 3 hombres y 3 mujeres trabajando en su sección y desea elegir dos trabajadores para una tarea específica. Decide seleccionarlos al azar. Sea X la variable aleatoria que define el número de mujeres en su selección, encuentre la distribución de probabilidades de la variable X y la distribución de probabilidad acumulada de X

Rx= { 0, 1,2,}

$P(X=0) = {}_3C_0 * {}_3C_2 / {}_6C_2 = 1/5$
$P(X=1) = {}_3C_1 * {}_3C_1 / {}_6C_2 = 3/5$
$P(X=2) = {}_3C_2 * {}_3C_0 / {}_6C_2 = 1/5$

X	P(X)	F(X)
0	01/05	01/05
1	03/05	05/04
2	01/05	1

4.46 En 15 experimentos que estudian las características fotoeléctricas de las celdas 11 usan micro electrodo de metal y 4 micro electrodo de vidrio. Si dos experimentos son cancelados por razones financieras, ¿cuál es la probabilidad que solo uno de los que emplean micro electrodo de vidrio sea cancelado?

X= Número de experimentos que usan micro electrodo de vidrio cancelados

$P(X = 1) = {}_{11}C_1 * {}_4C_1 / {}_{15}C_2 = 0.419$

4.47 Una vendedora se da cuenta que la probabilidad de una venta en una entrevista es 0.03. ¿Cuál es la probabilidad que haga al menos una venta si tiene 100 entrevistas con posibles compradores?

X = número de ventas en 100 entrevistas

Aproximando a la distribución de Poisson
np= 100*0.03= 0
$P(X \geq 1) = 1- P(X=0) = 1- e^{-3} *3^{0} / 0! = 1- 0.0497= 0.9502$

4.48 En una universidad se procesan cien mil calificaciones en determinado semestre, en ocasiones anteriores se ha descubierto que el 0.1% de todas las calificaciones están equivocadas. Si suponemos que una persona estudió 5 materias, ¿cuál es la probabilidad que las 5 calificaciones sean procesadas correctamente?

X= el número de calificaciones procesadas incorrectamente
np= 0.001*5 = 0.005
$P(X= 0) = e^{-0.005}\ 0.005^{0} / 0! = 0.995$

Otra forma es utilizar directamente la distribución binomial
${}_5C_0\ 0.001^{0} * 0.999^{5} =0.995$

4.49 Un tipo de árboles tienen retoños dispersos de manera aleatoria sobre un área extensa con una densidad de 5 retoños por yarda cuadrada.

Encuentre la probabilidad:

a. Que un guardabosque, al escoger al azar una porción de una yarda cuadrada, no encuentre retoños.

λ = 5 retoños por yarda cuadrada

$P(X = 0) = e^{-5}\ 5^{0} / 0! = 0.00674$

b. Al escoger una porción de 3 yardas cuadradas, encuentre más de dos retoños.

λs = 15 retoños en tres yardas cuadradas

$P(X > 2) = 1- P(X = 0) + P(X = 1) +P(X = 2) =$

$1- e^{-15}\ 15^{0} /0! - e^{-15}\ 15^{1} / 1! - e^{-15}\ 15^{2} / 2! = 1- 0.0000387= 0.9999$

4.50 Se certifica la calidad de los discos para computadora pasándolos por un verificador que cuenta el número de pulsos faltantes. Una determinada marca de discos tiene un promedio de 0.1 pulso faltante por disco.

Calcule la probabilidad:

a. Que el siguiente disco en inspección no tenga pulsos faltantes.

$P(X = 0) = e^{-0.1}\ 0.1^{0} /0!= 0.9048$

b. El siguiente disco que se inspecciona le falte más de un pulso.

$P(X > 1) = 1- P(X=0) - P(X=1)= 1 - 0.9048 - 0.09048 = 0.00471$

c. Ninguno de dos discos seleccionados le falten pulsos

Si los discos son independientes entonces la probabilidad que no les falten pulsos es: $0.9048^{2} = 0.8186$

4.51 Suponga que las llamadas telefónicas llegan a un conmutador telefónico a razón de 120 llamadas por hora.

Cuál es la probabilidad que en un periodo de un minuto lleguen entre 1 y 4 llamadas

s = un minuto

λ= 120 llamadas por hora

λs= 2 llamadas por minuto

X= número de llamadas en un minuto

$P(X \leq 1 \leq 4) = \Sigma\, e^{-2}\ 2^{x} /x!$ x= 1, 2, 3, 4

$P(X \leq 1 \leq 4)= 0.8120$

10. Problemas propuestos

4.52 Los registros hospitalarios de una ciudad han establecido que cierta enfermedad A la padece un 2 por millar de toda la población cada año.
En un barrio se calcula que vivan 10000 personas. Determine qué número de casos de la enfermedad se espera por año en el barrio. ¿Qué probabilidad hay de que en un año se presenten más de 4 casos? R: 20, 0.99998

4.53 De censos anteriores se sabe que en cierta ciudad el 65% la población son fumadores, este año se van a entrevistar solamente 100 pobladores. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 80 sean fumadores? R: 0.9983

4.54 En una feria se debe pagar 25 centavos por participar en un juego que consiste en tirar anillos. Se dan tres anillos a una persona la cual trata de lanzarlos uno a uno hacia una clavija. Se da un premio de $0.50 si logra ensartar un anillo, si logra ensartar dos el premio es de $1.00 y si se ensartan tres el premio es de $5.00. Suponiendo que la probabilidad de ensartar es constante en cada tiro y es igual a 0.1, ¿cuál es el premio esperado del juego? R: -$0.02875

4.55 Suponga que cada una de las llamadas que hace una persona a una estación de radio muy popular tiene una probabilidad de 0.02 de que la línea no esté ocupada. Suponga que las llamadas son independientes.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llamada que entre sea la décima que realiza la persona?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario llamar más de cinco veces para hallar desocupada la líneas?

c. ¿Cuál es el número promedio de llamadas que deben hacerse para hallar desocupada la línea?

R: 0.01667, 0.0957, 50

4.56 La Colorado Power Company proporciona tarifas más bajas a los clientes que prefieren las horas de menos consumo. El 30 % de sus clientes aprovecha estos ahorros. El departamento de servicio a clientes ha elegido a 12 clientes al azar para que participen en un grupo de interés para discutir a qué horas se produce el mayor consumo de energía. Al departamento de supervisión le preocupa que el grupo contenga una gran proporción de usuarios que prefieran las tarifas bajas.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de tres usuarios de tarifa baja en el grupo de interés?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener menos de ocho clientes normales en el grupo de interés?

c. Calcule la media y la desviación estándar para los usuarios de la tarifa baja en el grupo de interés.

R: 0.253, 0.275, 3.6

4.57 El señor Heath es responsable de la compara de cajas de vino para el restaurante Casa Blanca. Periódicamente elige una caja de prueba (12 botellas) para determinar si el proceso de sellado es adecuado. Para esta prueba selecciona al azar cuatro botellas de la caja para catar el vino. Si una caja contiene dos botellas de vino en mal estado, ¿cuál es la probabilidad de que precisamente una de ellas aparezca en la muestra? R: 0.485

4.58 El consejo de desarrollo económico de Knoxville ha determinado que el número de pequeños negocios que se declara en quiebra al mes tiene una distribución de Poisson con media 2.6. Calcule la probabilidad de que:

a. Ninguno se declare en quiebra el mes próximo
b. Ocurran menos de tres bancarrotas en el siguiente mes.
c. Ocurran dos bancarrotas durante los dos próximos meses.
R: 0.0743, 0.5184, 0.0746

CAPÍTULO 5

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES CONTINUAS

PACIENCIA Y TIEMPO

En una estación de combustible de una empresa de transporte, se presenta constantemente el fenómeno de la espera, materializado en largas colas de conductores que acuden a las bombas para recibir el combustible que necesitan para sus vehículos. Cosa muy interesante es reducir en lo posible el tiempo de espera de estos conductores ya que se toma en cuenta como tiempo dedicado teóricamente al transporte de los de los productos, es decir al servicio.

El número de bombas y empleados que se dediquen a servir el combustible ejercen marcada influencia sobre el tiempo de espera. Si hay demasiados no habrá filas de conductores pero por otra parte es una inversión mayor e inútil instalar y pagar el mantenimiento de tantas bombas que estén ociosas.

Si el número es insuficiente, entonces los conductores en la fila de espera, están ociosos.

¿Cuántas bombas, serán necesarias para distribuir el combustible de forma que ni los conductores ni éstas tengan demasiado tiempo improductivo? ¿Cuál es el costo mínimo de aprovisionamiento de combustible?

Lo primero es analizar el comportamiento de las llegadas de los conductores o sea hacer una medida estadística de las llegadas y admitir que este permanece igual a través del tiempo, los matemáticos dirían que se acepta un régimen estacionario. El análisis será el siguiente:

Cien veces seguidas durante un intervalo de 10 minutos cada vez se registra el número de camiones que se presentan a cargar combustible y se calculan las frecuencias de los números observados, los resultados se consignan en la tabla siguiente.

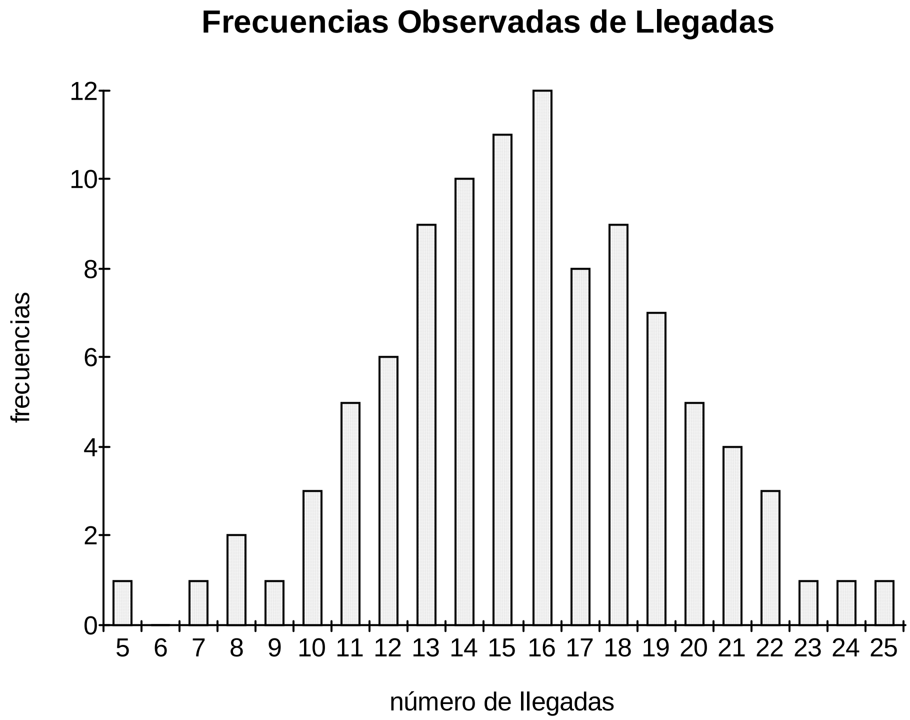
Al calcular el valor promedio se tiene 15.61 conductores cada 10 minutos, considerando adecuado hacer una aproximación se puede concluir que llegan en promedio 1.6 conductores por minuto.

COMPORTAMIENTO DE LAS LLEGADAS

Número de llegadas por 10 minutos	Frecuencia observada	Frecuencia teórica distribución Poisson
5	1	0.1
6	0	0.2
7	1	0.6
8	2	1.2
9	1	2.1
10	3	3.4
11	5	4.9
12	6	6.6
13	9	8.1
14	10	9.3
15	11	9.9
16	12	9.9
17	8	9.3
18	9	8.3
19	7	6.9
20	5	5.5
21	4	4.2
22	3	3.1
23	1	2.1
24	1	1.4
25	1	0.9

Ahora se debe encontrar una distribución de probabilidades teórica que sea útil para describir el comportamiento de las llegadas, tomando en consideración los supuestos:

1. La llegada de un conductor es independiente de la de otro.
2. Nunca llegan 2 o más conductores a la vez
3. La tasa media de las llegadas es invariable con el tiempo.



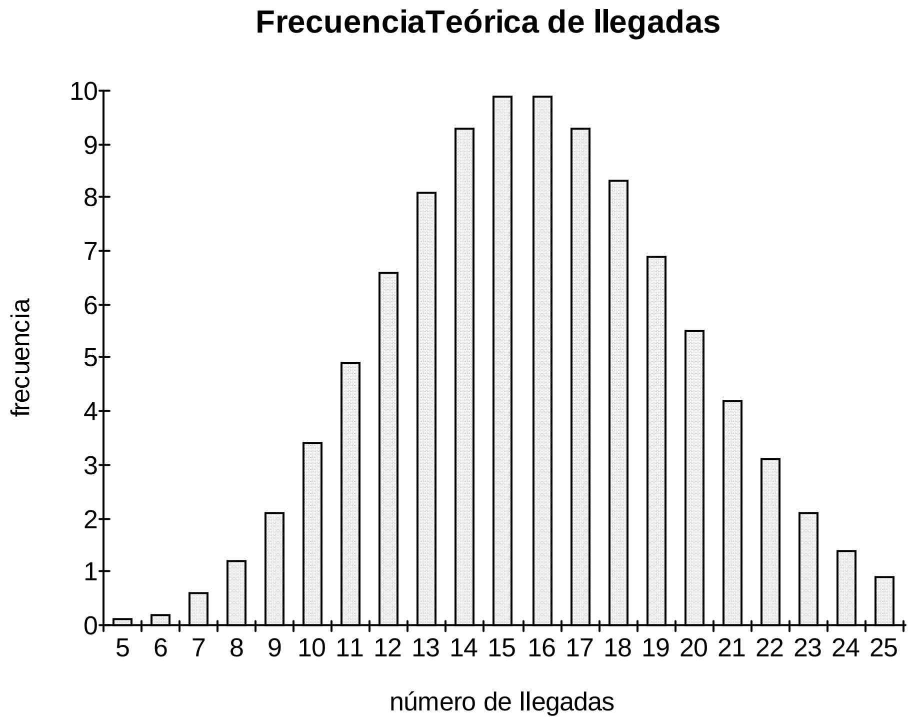
Una distribución muy conveniente y conocida para describir este comportamiento es la de Poisson. $P_t(n) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!$; que da la probabilidad de que se produzcan n llegadas, durante un intervalo t, la magnitud de λ representa la tasa media de llegadas con respecto a la unidad de tiempo seleccionada, $\lambda = 1.6$ conductores por minuto.

¿Por qué usar la distribución de Poisson? Cuando los sucesos que acontecen se encuentran separados por intervalos aleatorios y cuando son aceptables, al menos aproximadamente los supuestos anteriores es frecuente encontrar una distribución de Poisson.

En la tercera columna de la tabla se muestran las frecuencias teóricas de acuerdo a esta distribución y pueden ser comparadas con las observadas.

Así : $P(X=5) = e^{-1.6(10)} (1.6 * 10)^5 / 5! = 0.001$, por lo que en 100 intervalos se espera una frecuencia de 0.1.

El mismo procedimiento se sigue para cada uno de los valores del número de llegadas.



Es importante aclarar que queda fuera del alcance de esta historia realizar la prueba estadística para verificar si se puede aceptar esta distribución para describir el comportamiento de las llegadas, el lector interesado puede remitirse a bibliografía relacionada con estadística inferencial.

A continuación se analizará la forma como afecta el servicio en el tiempo de espera..

Estaciones de Servicio

|---------------- O Estación 1

|---------------- O Estación 2

Fila de conductores | *

| *

|----------------- O Estación S

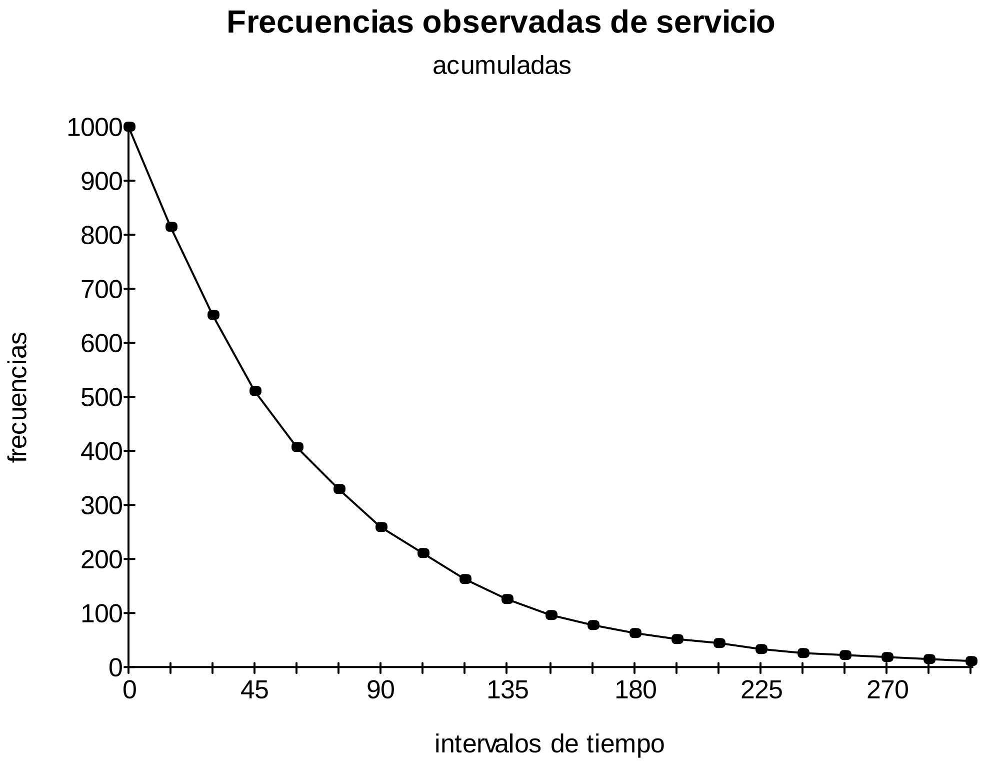
Cuando un conductor se presenta, una de las bombas libres le surte de combustible, la duración de este servicio es aleatoria, por ejemplo 15 segundos, 30 segundos, etc. Cuando todas están ocupadas, entonces, el conductor debe esperar formando una fila común para todas las estaciones y es atendido por la primera que queda libre. Se acepta que los conductores no manifiestan preferencia por ninguna bomba, cuando varias están libres la probabilidad que una llegada sea servida por uno o por otra bomba es la misma.

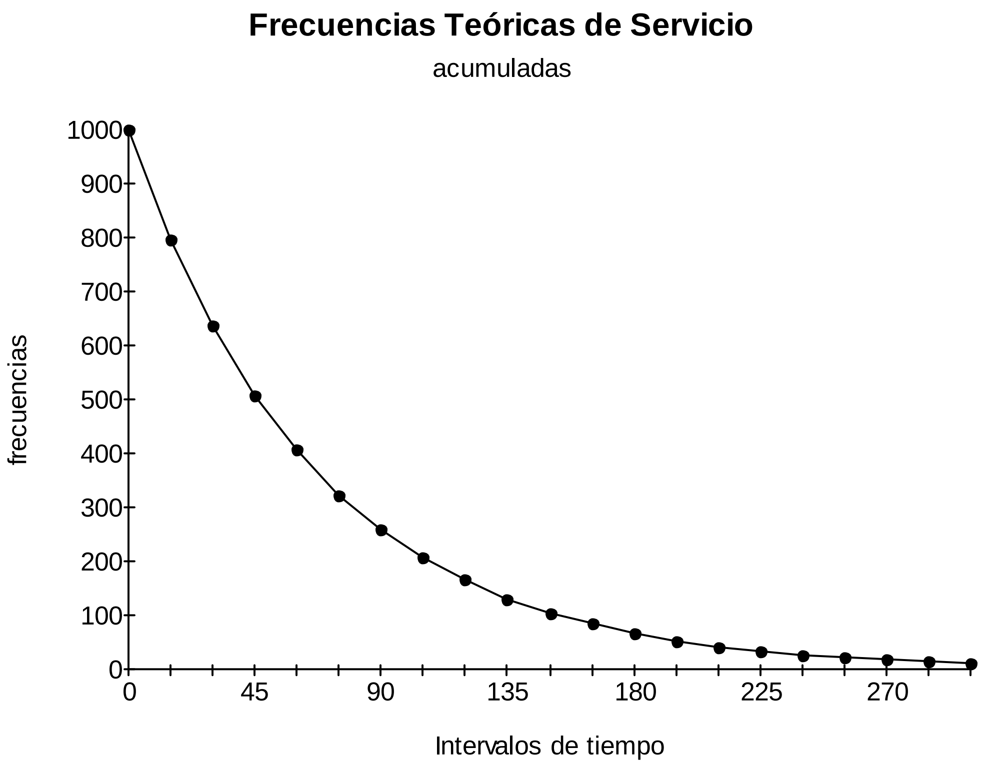
Para establecer la distribución de los tiempos de servicio, se ha cronometrado el tiempo desde que comienza el servicio hasta que termina con un dispositivo especial. Se registraron 1000 servicios calculándose las frecuencias que corresponden agrupadas en intervalo, con rangos de 15 segundos cada uno.

Se calcula el valor promedio igual a 1.1 minutos encontrándose una aproximación a la distribución exponencial $f(t) = \mu e^{-\mu t}$, T es la variable tiempo de servicio, mayor que 0, medida en minutos. $P(T > t) = e^{-\mu t}$, es la probabilidad de que el servicio tarde más de t minutos.

COMPORTAMIENTO DE LOS SERVICIOS

Intervalos de tiempo segundos	Frecuencias acumuladas observadas	Frecuencias teóricas acumuladas Distribución Exponencial
0	1000	1009
15	813	798
30	652	637
45	512	508
60	408	406
75	330	324
90	261	259
105	210	207
120	163	165
135	125	131
150	95	105
165	79	84
180	62	67
195	51	53
210	44	42
225	35	34
240	26	27
255	21	21
270	17	17
285	13	14
300	10	11


Frecuencias observadas de servicio
acumuladas
frecuencias
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
45
90
135
180
225
270
intervalos de tiempo


Frecuencias Teóricas de Servicio
acumuladas
frecuencias
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
45
90
135
180
225
270
Intervalos de tiempo

En ambas fórmulas μ se conoce como tasa de servicio es igual al inverso del valor promedio $\mu = 1 / 1.1 = 0.9$, número medio de servicios por unidad de tiempo por cada una de las bombas

Así para calcular las frecuencias teóricas se aplicó la fórmula de la forma siguiente: $P(X > 15 \text{ segundos}) = P(T > 0.25 \text{ min}) = e^{-0.9(0.25)} = 0.798$, en 1000 observaciones se esperan 798 servicios.

Si μ es la tase de servicio en cada una de las bombas entonces para S bombas, que se consideran con igualdad de condiciones, esa tasa de servicio es μS.

Es importante, puesto que se trata de medias, que la tasa de llegadas no supere la tasa total de servicio, de donde $\lambda < \mu S$, es decir $\lambda / (\mu S) < 1$, ya que si este fuera mayor que 1 la fila llegaría a ser infinita. A este cociente se le llama intensidad de tráfico ρ , en este caso es 1.77/S

Para examinar el aspecto económico del problema hay que tener información sobre el tiempo de espera de cada conductor, para eso se necesitan dos fórmulas de las cuales queda su demostración fuera del alcance de esta historia.

Tiempo Promedio de Espera

$$W_q = \frac{P_o\, \rho\, (\lambda/\mu)^S}{\lambda\, S!\, (1-\rho)^2}$$

Probabilidad que el sistema este vacío

$$P_o = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{s!} * \frac{1}{1-(\lambda/\mu s)} \right]^{-1}$$

Así para diferentes valores de S se encuentran sus diferentes tiempos promedio de espera, W.

S	ρ	Po	Wq
2	0.88	0.0588	4
3	0.59	0.1562	0.31
4	0.44	0.1654	0.06

No se calcula el tiempo promedio de espera para S =1, puesto que en ese caso la Intensidad de Tráfico, repetimos, es mayor que 1 y la duración media de la espera sería infinita, que significa una cola inmensamente larga.

El análisis económico del problema es el siguiente:

En una jornada de 8 horas, con tasa de llegada 1.6 conductores por minuto, 768 conductores se presentan en la estación (1.6*60*8). A ese número de llegadas le corresponde, con un tiempo medio de servicio 1.1 minutos, 14.08 horas (768*1.1= 844.8 min.) de servicio.

En seguida puede obtenerse la duración de la inactividad del servicio, V:
Para S = 2 V = 2*8 - 14.08 = 1.92 horas
Para S =3 V= 3*8 - 14.08 = 9.92 horas
Para S= 4 V= 4*8 - 14.08 = 17.92 horas

El tiempo perdido por los conductores usando el tiempo promedio de espera Wq se calcula:

Para S = 2 768 * 4 = 3072 minutos = 51.2 Horas
Para S = 3 768 * 0.31= 238 minutos 3.96 horas
Para S = 4 768 * 0.06 = 46 minutos = 0.76 horas

Si de acuerdo con la experiencia de la empresa el costo estimado por hora para cada bomba instalada y con su personal de servicio es de $3 y para cada uno de los conductores el costo por hora, considerando el salario y las pérdida por la improductividad de los vehículos es de $6, el costo total diario de horas perdidas por uno y por otro se calcula:

Para S = 2 1.92 * 3 + 51.2 * 6 = 312.96
Para S = 3 9.92 * 3 + 3.96 * 6 = 53.52
Para S= 4 17.92 * 3 + 0.76 * 6 = 58.32

Se admite que un mínimo costo ocurre en S=3 y la mejor selección consistirá aparentemente en instalar 3 bombas.

Pero cuando la Directiva de la empresa decide instalar 4, la razón de tal decisión la argumentará de la siguiente forma: Instalar 4 bombas no cuesta más de 4.8 dólares (58.32- 53.52) diarios, así que si se considera que la probabilidad de que una bomba esté descompuesta es 8%, si se instalen 3 cuando una de las tres falle el gasto suplementario sería (312.96 - 53.52) 259.44 dólares o sea que en promedio es 259.44 * 0.08 = 20.75 dólares diarios por tanto 4 bombas son en realidad menos costosas que 3.

****

1. Introducción

En el capítulo anterior se indicó que el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria queda descrito por una distribución de probabilidades si la variable aleatoria es discreta o por una función de densidad de probabilidad si la variable es continuas; además se presentaron las distribuciones de probabilidad utilizadas frecuentemente para modelar variables discretas.

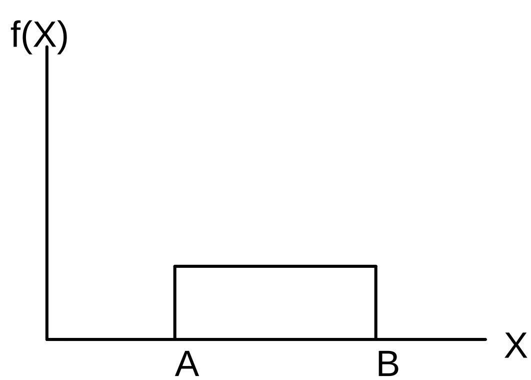
En este capítulo se presentan las distribuciones más importantes asociadas a variables continuas, describiéndolas por su función de densidad o por la función de distribución acumulada. Se ilustra también el cálculo de probabilidades acumuladas y de los eventos de interés por medio de las funciones de Excel, en el apéndice 1 se detalla esta aplicación.

2. Distribución Uniforme

Si X es una variable aleatoria continua, toma todos los valores en el rango [A, B] con función de probabilidad:

$$f(X) = 1/ (A-B) \quad A \leq X \leq B$$

Entonces X tiene una distribución Uniforme



$E(X) = (A+B)/2$ $V(X) = (B-A)^2/12$ $F(X)= (X-A)/(B-A)$

Esta distribución representa la analogía de los resultados igualmente probables en los eventos discretos, en esta, todo sub intervalo de igual longitud, identificado en el recorrido de la variable aleatoria, tiene idéntica probabilidad de ocurrencia.

Ejemplo:

5.1 Una persona viaja diariamente en autobús para ir de su casa a su trabajo, los autobuses salen de la estación a las 7:00, 7:13, 7:20, 7:25 y 7:30 a.m. y aborda el primero tan pronto llega a la estación, la hora en la que esta persona llega a la estación tiene la misma verosimilitud de estar comprendida entre las 7:10 y las 7:30. La probabilidad de que deba de esperar menos de 5 minutos en un día cualquiera, para que salga el autobús, puede determinarse de la forma siguiente:

Sea X la Variable Aleatoria que denota la hora en que la persona llega a la estación.

X es una variable con distribución uniforme y

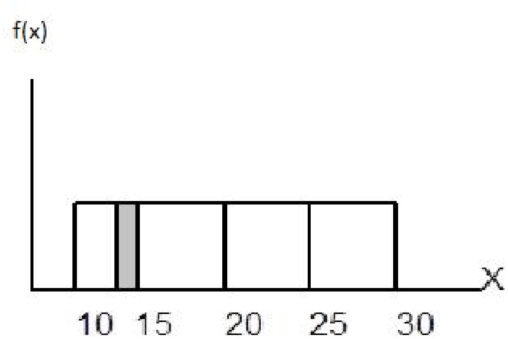
$f(X) = 1/(30-10) = 1/20 \qquad 10 \leq X \leq 30$

La persona espera menos de 5 minutos si llega en cualquiera de los intervalos siguientes:

Entre las 7:10 y las 7:13
Entre las 7:15 y las 7:20
Entre las 7:20 y las 7:25
Entre las 7:25 y las 7:30

La probabilidad de que espere menos de 5 minutos es igual a la probabilidad de que llegue en cualquiera de los intervalos anteriores.

Esto es: $P(10 \leq X \leq 13) + P(15 \leq X \leq 30) = \int_{10}^{13} 1/20 \, dx + \int_{15}^{30} 1/20 \, dx = 18/20$



5.2 A partir de las 12 de la noche un centro de cómputo trabaja durante una hora y para dos horas, en un ciclo regular hasta las 6 de la mañana. Una persona que no conoce este calendario llama al centro en un momento aleatorio entre las 12 y las 5 am.
Cuál es la probabilidad que el centro de cómputo esté trabajando cuando llama
K = 1/ (b-a) = 1/ (5-0) = 1/5
Probabilidad de que cuando llame esté trabajando es la probabilidad de que llame durante el periodo de dos horas que el centro trabaja durante el intervalo de 0 a 6 horas, esta probabilidad es 2/5.

Resuelva

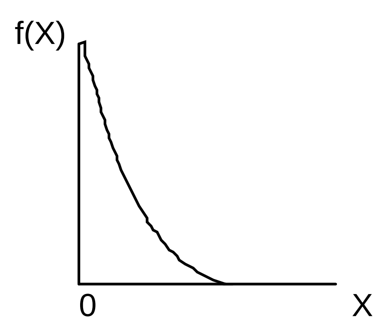
5.3 La cantidad de café en litros por día que despacha una máquina vendedora instalada en la sala de espera de un aeropuerto, es una variable aleatoria que tiene distribución uniforme con $f(X) = 1/3$ cuando $7 < X < 10$. Encuentre la probabilidad que en un determinado día, el café despachado por esta máquina sea más de 4.71 pero menos de 9.51 litros.
R: 0.7
Cuál es la probabilidad que en determinado día se despache por lo menos 8.51 litros.

3. Distribución Exponencial

Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los posibles valores no negativos, tiene una distribución exponencial con parámetro β, mayor que cero, si su función de densidad de probabilidad es:

$f(X) = (1/\beta)\, e^{-x/\beta} \qquad x > 0$

$E(X) = \beta \qquad V(X) = \beta^2 \qquad F(X) = P(X \leq X_o) = 1 - e^{-x^o/\beta}$



Una de las propiedades de la distribución exponencial es que la variable aleatoria no tiene memoria, esto es, si la vida útil de un elemento es una variable con distribución exponencial, la probabilidad de que dure Y horas adicionales dado que ya duró X_o horas es igual a la probabilidad de que dure Y horas, no importando el tiempo que ha transcurrido, en otras palabras un elemento nuevo no es mejor que uno que ya duró X horas.

$P(X>X_o+Y/ X>X_o) = P(X> X_o+Y) / P(X>X_o) = \exp (-(X_o+Y)/\beta) / \exp(-X_o/\beta)= \exp (-Y/\beta)$

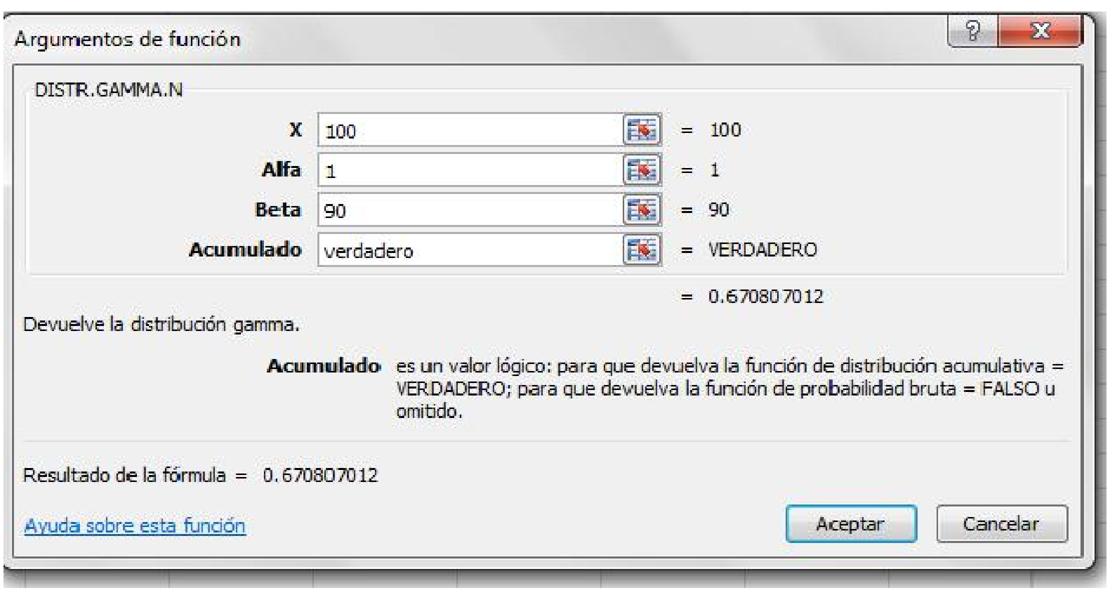
Ejemplo:

5.4 Un componente de un equipo electrónico tiene una vida promedio de 90 horas, suponiendo que el tiempo de vida sigue una distribución exponencial, la probabilidad de que trabaje 100 horas por lo menos es:

$E(X) = 90 = \beta$

$P(X>100) = 1 - P(X \leq 100) = e^{-10/9} = 0.3292$

Si se utiliza la función de distribución acumulada P(X>100) = 1 – P(X<100)= 1-0.6708



Cuál es la probabilidad de que trabaje más de 130 horas dado que ya trabajo más de 100 horas.

P(X>120/ X >100) = P (X>120) / PX>100) = $e^{-(120/90)}$ / $e^{-(100/90)}$ = 0.263597/0.3292 = 0.80 = $e^{-(20/90)}$

Resuelva:

5.5 El tiempo que tarda una persona en ser atendida en una cafetería es una variable aleatoria exponencial con media de 4 minutos. Cuál es la probabilidad que una persona sea atendida en menos de 3 minutos.
R: 0.527

La distribución exponencial se ha aplicado con amplitud a diversos campos, por ejemplo, confiabilidad, teoría de la líneas de espera, puede representar la distribución del tiempo que transcurre hasta que se realice un evento, o también el volumen, área, longitud, que hay que observar para que ocurra un evento.

Existe una relación entre la distribución exponencial y el proceso de Poisson. Dado un Proceso de Poisson con parámetro λ, si se designara con cero el momento en el cual se empieza a observar el proceso y X es el tiempo que transcurre hasta que ocurre el primer evento, X es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con $\beta = 1/\lambda$.

Ejemplo:

5.6 Suponga que el número de accidentes en una fábrica se puede representar por un proceso de Poisson con promedio 2 accidentes por semana, la probabilidad que el tiempo entre un accidente y es siguiente sea mayor de 3 días se calcula de la siguiente forma:

λ= 2 accidentes por semana, entonces $\beta = 1/2$

El tiempo promedio que transcurre entre un accidente y otro es 1/2 semana

P(X > 3/7) = $e^{-2(3/7)}$) = 0.4243

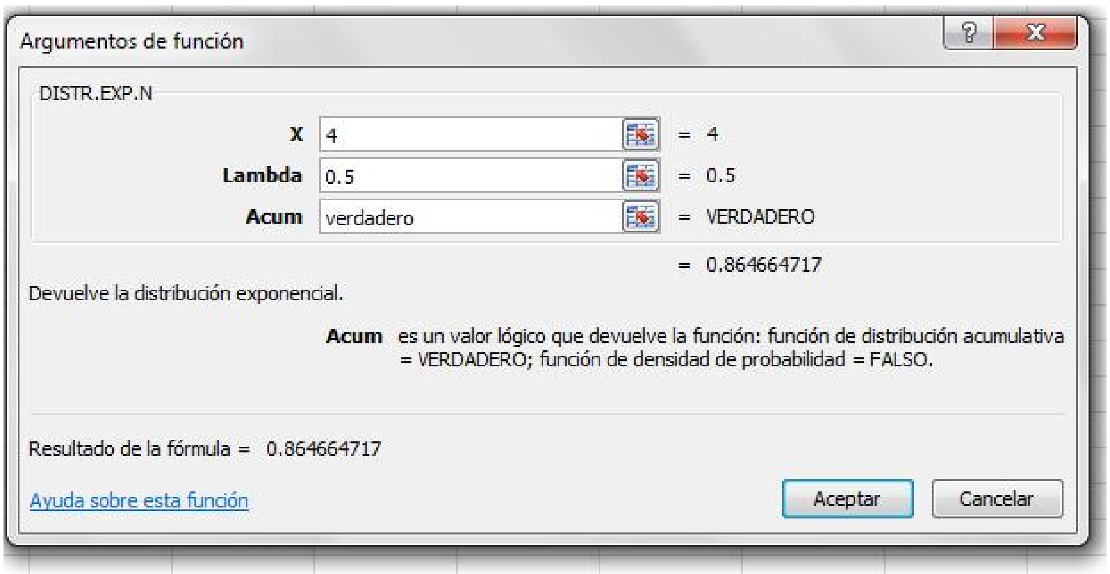
5.7 Se ha observado que las fallas mecánicas ocurren en una máquina como un proceso de Poisson con lambda igual a 0.5 fallas por hora.

Cuál es la probabilidad que partiendo del tiempo en que se inicia el funcionamiento hasta la primera falla y sea mayor que 1 hora

$P(X > 1) = e^{(-0.5\,(1))} = 0.6065$

Cuál es la probabilidad que el tiempo entre la primera y segunda falla sea menor que 4 horas

$P(x < 4) = 1 - e^{(-0.5\,(4))} = 1 - e^{-2} = 0.8677$



Cuál es la probabilidad que el tiempo entre la primera y segunda falla sea mayor que 2 pero menor que tres

$P(2<X<3) = (1- e^{(-0.5(1)}) - (1 - e^{(-0.5(2)}) = 0.3678 - 0.223 = 0.14488$

Resuelva

5.8 En cierta región del oeste de los Estados Unidos el número de huracanes que ocurren al año es una variable de Poisson con promedio 6. Cuál es la probabilidad que después del huracán ocurrido en febrero pasado, transcurran más de 3 meses sin aparecer otro.

R: 0.223

4. Distribución Gamma

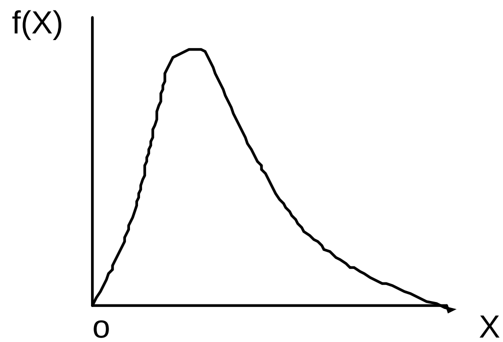
Se dice que X, una variable aleatoria continua que toma todos los valores no negativos, tiene una distribución Gamma si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$f(X) = [\, 1/ (\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)\,)\,]\ X^{(\alpha-1)}\, e^{-x/\beta}$

donde β y α son positivos y se conocen como parámetros de la distribución, β es el parámetro de escala y sus valores alargan o comprimen la función y α es el parámetro de forma. $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma definida como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{oo} x^{(\alpha-1)}\, e^{-x}\, dx$$

cuando α = n es un entero, $\Gamma(\alpha)$ = (n-1) !
$\Gamma(1) = 1$ $\Gamma(0.5) = \pi$



$$F(X) = [\, 1/ (\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)\,)\,] \int_0^{x°} X^{(\alpha-1)}\, e^{-x/\beta}\, dx$$

$E(X) = \alpha\,\beta$ $V(X) = \alpha\beta^2$

La distribución Gamma frecuentemente se utiliza para modelar variables aleatorias que por varias razones tienen distribuciones asimétricas, sesgadas a la derecha, seleccionando adecuadamente los parámetros β y α.

Ejemplo:

5.9 Para un determinado sistema electrónico la vida útil se considera como una variable aleatoria con distribución Gamma con β = 400 y α = 2.

$f(X) = [\, [\, 1/ (400^{2}\, \Gamma(2)\,)\,]\ X\ e^{-x/_{400}}$

$$f(X) = [1/400^{2}) X e^{-x/_{400}}$$

La probabilidad de que la variable sea mayor que 800 es:

$$P(X> 800) = 1 - \int_{0}^{800} (1/400^{2}) X e^{-x/_{400}} dx = 1 - 0.593993 = 0.4060$$

La probabilidad de que la vida útil sea mayor que 500 pero menor que 700 es:

$$P(500< X< 700) = \int_{500}^{700} (1/400^{2}) X e^{-x/_{400}} dx = 0.16675$$

$E(X) = 400 * 2 = 800$

$V(X) = 2 * 400^{2} = 320000$

5.10 En una ciudad el consumo de energía eléctrica en millones de kilowatts hora es una variable aleatoria que tiene una distribución Gamma con media 6 y varianza doce

Encuentre el valor de los parámetros alfa y beta de la distribución

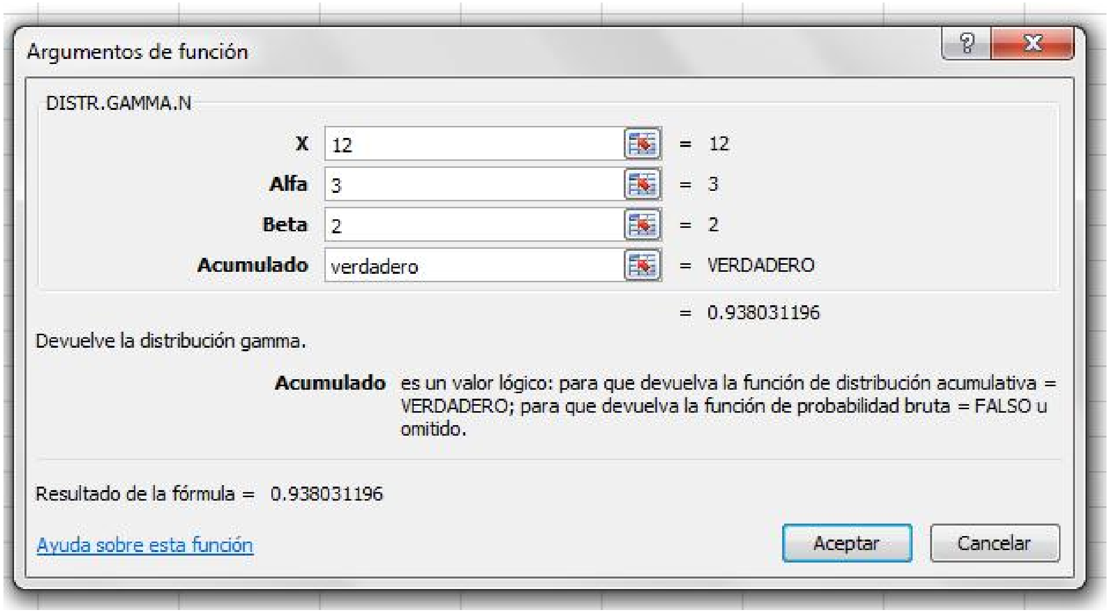
$6= \alpha * \beta$

$12= \alpha * \beta^2$ entonces $\alpha = 3$ $\beta= 2$

$$f(x) = [1/ (2^3 * \Gamma (3))] x^{(3-1)} e^{-(x/2)} = (1/16) x^2 e^{-(x/2)}$$

Cuál es la probabilidad que el consumo sea mayor de 12 millones de kilowatts hora

$$P (X>12) = 1 - P(x<12) = 1 - \int_{0}^{12} (1/16) x^2 e^{-x/2} = 1- 15.009/16= 0.061937$$



Resuelva

5.11 En una ciudad el consumo de agua en millones de metros cúbicos por hora es una variable aleatoria con distribución gamma con α = 3 y β= 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el consumo sea mayor que 12 millones de metros cúbicos en una hora dada?
R: 0.061937

Una de las aplicaciones de la distribución Gamma aparece cuando, en un proceso de Poisson, se estudia la distribución de tiempo (longitud, volumen, área, etc.) necesario para obtener un número n especificado de ocurrencias. Por lo que se le relaciona directamente al estudiar el tiempo que transcurre para que se presente un número determinado de eventos (n).

Suponga que el tiempo en servir un cliente es una variable aleatoria exponencial con parámetro β, entonces la variable aleatoria T que corresponde al tiempo total en servir n clientes independientes tiene una distribución Gamma con parámetros α = n y β.

Ejemplo:

5.12 En una planta telefónica se estima que las llamadas llegan a razón de 0.4 por minuto, La probabilidad de que transcurran menos de 6 minutos para que ingresen exactamente dos llamadas se calcula aplicando la distribución Gamma como sigue:

X = Tiempo transcurrido desde el inicio de la observación hasta el ingreso de dos llamadas, n = 2.

$\beta = 1/\lambda = 1/0.4 = 2.5$ minutos

$\alpha = n = 2$ llamadas

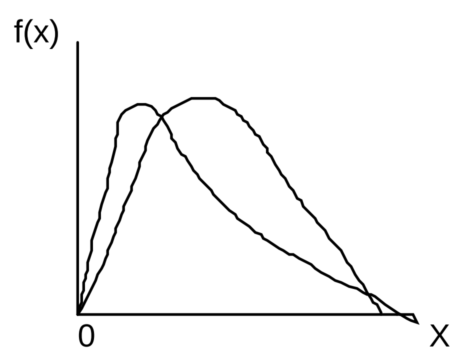
$f(X) = [1/2.5^2)\ x\ e^{-x/2.5}$

$$P(X \leq 6) = \int_0^6 (1/2.5^2)\ x\ e^{-x/2.5}\ dx = 0.6916$$

5. Distribución Weibull

Se dice que X, una variable aleatoria continua que toma todos los valores no negativos tiene una función de densidad Weibull, con parámetros α, β si:

$$f(X) = (\alpha/\beta^{\alpha})\ X^{\alpha-1}\ e\text{xp}(-x/\beta)^{\alpha} \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0$$



El parámetro β es denominado de escala y α de forma. Cambiando los diferentes valores de los parámetros se pueden generar diferentes curvas que modelen variables aleatorias en la vida real.

$F(X) = 1 - e\text{xp}(-x/\beta)^{\alpha}$

$E(X) = \beta\,\Gamma(1+1/\alpha)$

$V(X) = \beta^2\,[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma(1+1/\alpha)^2]$

Ejemplo:

5.13 Suponga que la vida, en años, de una batería es una variable de Weibull con $\alpha = 2$ β= 1.4142 la probabilidad de que la batería esté operando después de dos años es:

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(x = 2) = 1 - [1 - \exp(-2/1.4142)^2] = e^{-2} = 0.135$

El valor esperado de la vida de la batería es

$E(X) = 1.4142\ \Gamma(1+1/2) = 1.4142 * 0.8862 = 1.2533$

5.14 Dada una variable aleatoria con distribución Weibull con $\alpha = 3$ y $\beta = 0.5$
Determine la siguiente probabilidad $P(X < 0.25)$ y $P(0.1 < x < 0.2)$
$F(x) = 1 - \exp -(X/\beta)^{\alpha}$

$P(X<0.25) = 1 - \exp(-(0.25/0.5)^3) = 1 - e^{-0.125} = 1 - 0.8824 = 0.1175$

$P(0.1 < X < 0.2) = F(0.2) - F(0.1) =$

$(1 - \exp(0.2/.5)^3) - (1 - \exp(0.1/.5)^3) = (1 - \exp^{-0.064}) - (1 - \exp^{-0.008}) =$

$(1 - 0.9938) - (1 - 0.99203) = 0.061995 - 0.0079528 = 0.054022$

Resuelva

5.15 La duración en años de cierto sello para automóvil tiene una distribución de Weibull con β= 3y α =2

Encuentre la probabilidad de que tal sello falle antes de los 4 años. R: 0.83

6. Distribución Beta

Se dice que X, una variable aleatoria continua que toma todos los valores posibles entre A y B, tiene una función de densidad de probabilidad Beta con parámetros α, β, A y B, si su función de densidad de probabilidad es:

$f(X) = [1/(B-A)]\ [\Gamma(\alpha+\beta)/\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)]\ [(X-A)/(B-A)]^{(\alpha-1)}\ [(B-X)/(B-A)]^{(\beta-1)}$

Con recorrido $A \leq X \leq B$ y $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$E(X) = A + (B-A)\ (\alpha / (\alpha + \beta)$ $V(X) = (B-A)^2 (\alpha\beta) / [(\alpha+\beta)^2 (\alpha+\beta+1)]$

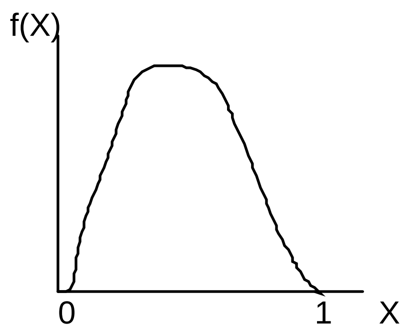
Un caso especial de esta variable aleatoria continua es Distribución de Probabilidades Beta Estándar, y su función de densidad está dada por:

$$f(X) = [\ \Gamma(\alpha + \beta) / \Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)\ ]\ X^{(\alpha - 1)}\ (1-X)^{(\beta-1)}$$

$\alpha > 0$ y $\beta > 0$

Se caracteriza porque su recorrido tiene límite superior e inferior finitos: $0 \leq X \leq 1$, por lo que este modelo se utiliza frecuentemente para las variables aleatorias que representan proporciones.

$E(X) = (\alpha) / (\alpha + \beta)$ $V(X) = (\alpha\beta) / [(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)]$



Ejemplo:

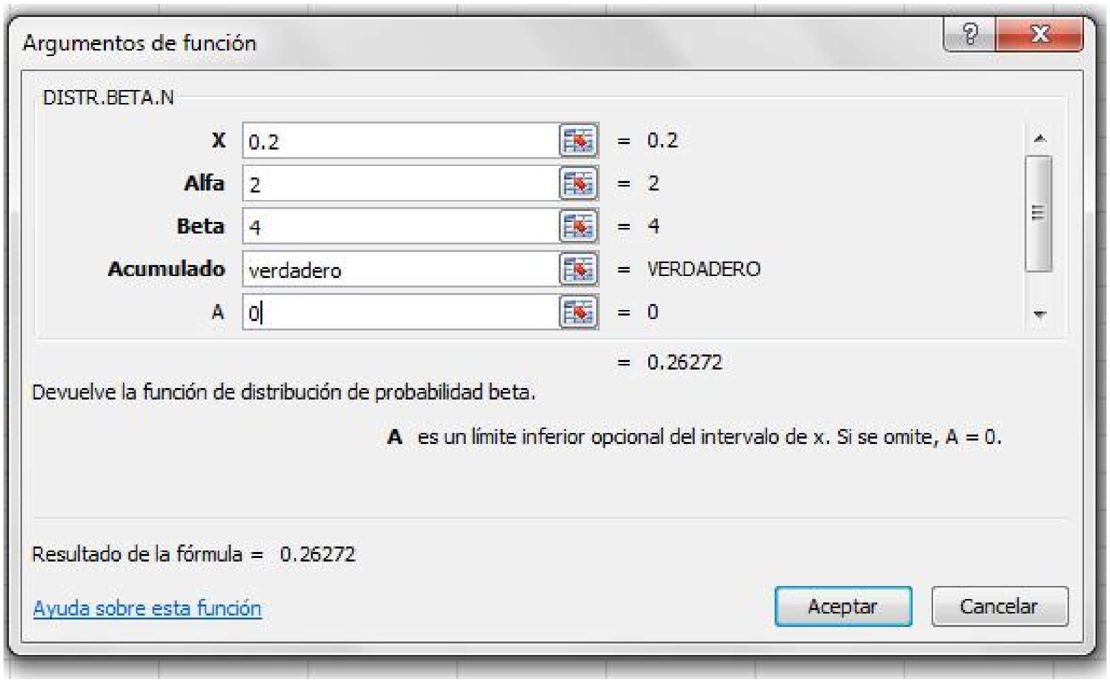
5.16 Se determinó que el aprovechamiento de un núcleo de computadora, definido como una proporción de la capacidad total, tiene una distribución de frecuencias relativas que puede aproximarse mediante una función de densidad Beta Estándar con $\alpha = 2$ $\beta = 4$.

La probabilidad de que la proporción de núcleo que se utiliza en un momento dado sea menor que 0.2 es

$f(X) = [\Gamma(6) / [\ \Gamma(2)\ \Gamma(4)\ ]]\ X\ (1-X)^3$

$f(X) = 20\ X\ (1-X)^3$

$$P(X < 0.2) = \int_0^{0.2} 20\ X\ (1-X)^3 = 0.2627$$



5.17 Un distribuidor mayorista de gasolina tiene tanques de almacenamiento con aprovisionamiento fijo, los tanques se llenan los lunes, para el mayorista es interesante la proporción de volumen que se vende durante la semana. Durante muchas semanas e ha observado que esa proporción se modela muy bien con una distribución Beta Estándar con $\alpha = 4$ y $\beta = 2$
Será muy probable que el mayorista vende por le menos el 90% de su capacidad en una semana determinada, cuánto espera vender en una semana.

$$f(X) = [\,\Gamma(4+2) / \Gamma(4)\,\Gamma(2)\,]\, X^{(4-1)} (1-X)^{(2-1)} = 20\, x^3 (1-X)$$

$$P(X > 0.9) = \int_{.9}^{1} 20\, x^3 (1-X) = 20 * 4.073\text{ E-3} = 0.08146$$

El valor esperado de la proporción es E(X) = 4/6 = 2/3

Resuelva:

5.18 Del total de la cosecha de cierta fruta en una finca hay una fracción X que ha sido dañada por la plaga, el dueño de la fina estima que X tiene una distribución Beta estándar con alfa igual 1 y beta igual 4. Calcule la probabilidad de que al menos 0.25 de la cosecha esté dañada por la plaga
R: 0. 6835

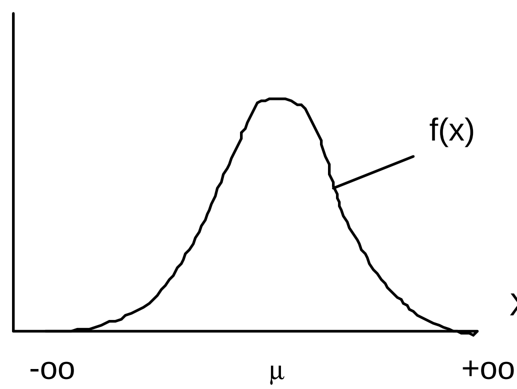
7. Distribución Normal

La distribución normal es la distribución continua más importante y se utiliza en una amplia gama de problemas.

Fue introducida por Carl Friedrich Gauss a principios del siglo XIX en su estudio sobre los errores de medida, sin embargo ya se tenían algunos conocimientos poco difundidos en trabajos de Abraham de Moivre en el siglo XVII. Desde entonces, se ha utilizado como modelo probabilístico en multitud de variables continuas, justificada por la frecuencia con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento, normalidad, en cuya distribución los valores más usuales se agrupan en torno a uno central y los valores extremos son escasos. Por eso la gráfica de la función de densidad tiene forma de campana.

Además hay otras variables que por medio de transformaciones pueden convertirse o aproximarse a variables con distribuciones normales por lo que es fundamental en inferencia estadística ya que ciertas variables a las que se les van a efectuar pruebas deben seguir supuestamente esta forma de distribución.

Distribución Normal



Una variable aleatoria X toma todos los valores reales entre -oo y +oo tiene una distribución normal si su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \left(1 / [(2\pi)^{0.5} \sigma] \; e\text{xp}(-0.5[(x-\mu)/\sigma]^{2} \right)$$

Donde μ y σ se denominan parámetros de la distribución, $-oo < \mu < +oo$ y $\sigma > 0$, estos parámetros corresponden al valor esperado o media y la desviación estándar de la variable aleatoria.

La distribución normal queda definida por dos parámetros, su media y su desviación estándar y se representa así: $N(\mu,\sigma^2)$

Propiedades de la distribución normal:
La distribución normal posee ciertas propiedades importantes:

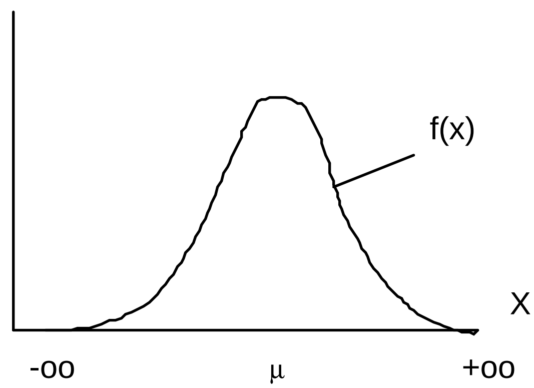
i. Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana.

ii. La curva normal es asintótica al eje de abscisas. Por ello, cualquier valor entre menos infinito y más infinito es teóricamente posible.

iii. El área total bajo la curva es, por tanto, igual a 1.

iv. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación estándar (σ). Cuanto mayor sea σ más aplanada será la curva de la densidad.

v. La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de μ la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de σ, más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana.



v. Medidas descriptivas

i. Media: μ

ii. Moda: μ

iii. Mediana: μ

iv. Desviación estándar: σ

v. Varianza: σ^2

vi. Coeficiente de asimetría: 0

vii. Coeficiente de Kurtosis o apuntamiento: 3

Probabilidades

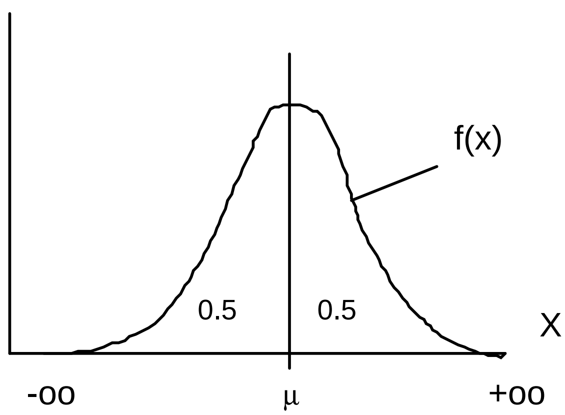
Si, en el eje horizontal, se levantan perpendiculares en dos puntos a y b, el área bajo la curva delimitada por esas líneas indica la probabilidad de que la variable de interés, X, tome un valor cualquiera en ese intervalo.

Puesto que la curva alcanza su mayor altura en torno a la media, mientras que sus extremos se extienden asintóticamente hacia los ejes, cuando una variable siga una distribución normal, será mucho más probable observar un dato cercano al valor medio que uno que se encuentre muy alejado de éste. Por lo tanto:

i. La distribución puede tomar cualquier valor.
ii. Son más probables los valores cercanos a uno central que llamamos media.
iii. Conforme nos separamos de ese valor la probabilidad va decreciendo de igual forma a derecha e izquierda (es simétrica).
iv. Conforme nos separamos de ese valor la probabilidad va decreciendo de forma más o menos rápida dependiendo de un parámetro que es la desviación estándar.

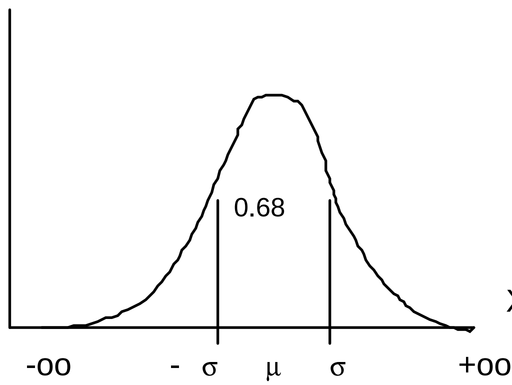
Es simétrica en torno a la media μ, debido a ello el 50% del área está a la derecha de una perpendicular trazada en la media y el 50 % restante hacia la izquierda;

$P(x < \mu) = 0.5 = P(x > \mu)$



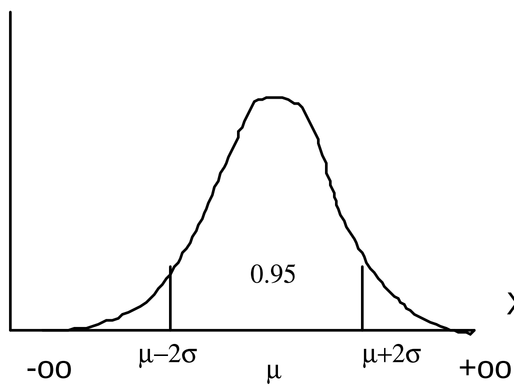
Si se trazan perpendiculares a una distancia de 1σ a partir de la media μ en ambas direcciones el área que encierra es aproximadamente del 68%

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 0.68$$



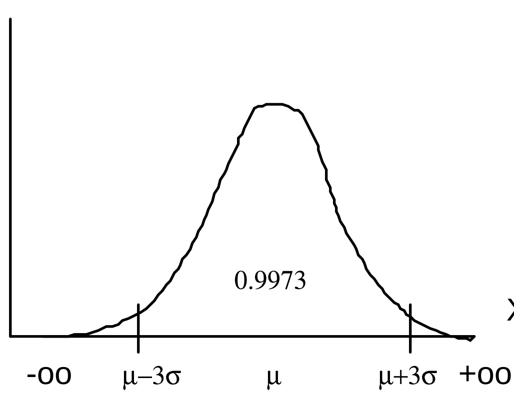
Si se trazan perpendiculares a una distancia 2σ a partir de la media se encierra aproximadamente el 95% del área.

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0.95$$



Extendiéndose a una distancia de 3σ se logrará encerrar aproximadamente el 99.73% del área

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

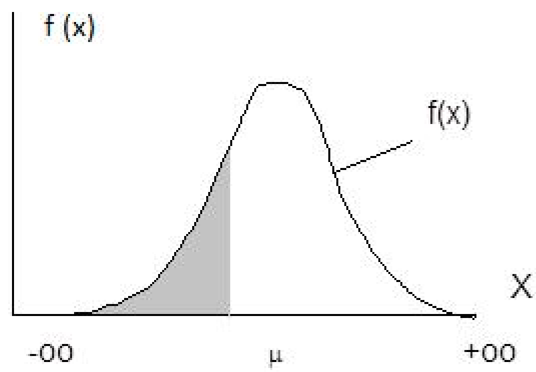


La distribución Normal está determinada por los parámetros μ y σ, por lo que se especifica una distribución diferente para cada uno de los posibles valores de éstos.

Función de distribución

$$F(X) = \int_{-oo}^{x_o} (1 / [(2\pi)^{0.5} \sigma] \; e\text{xp}(-0.5[(x-\mu)/\sigma]^2) \, dx$$

$F(X= x_o) = P\ (X < x_o)$



$P(x_1<X<x_2) = F(X< x_2) – F(X<x_1)$

Ejemplo

5.19 Un investigador informa que unos ratones vivirán un promedio de 40 meses cuando sus dietas se restringen drásticamente y después se enriquecen con vitaminas y proteínas. Suponiendo que la vida de tales ratones se distribuye normalmente con una desviación estándar de 6.3 meses, encuentre la probabilidad de que un ratón dado vivirá:

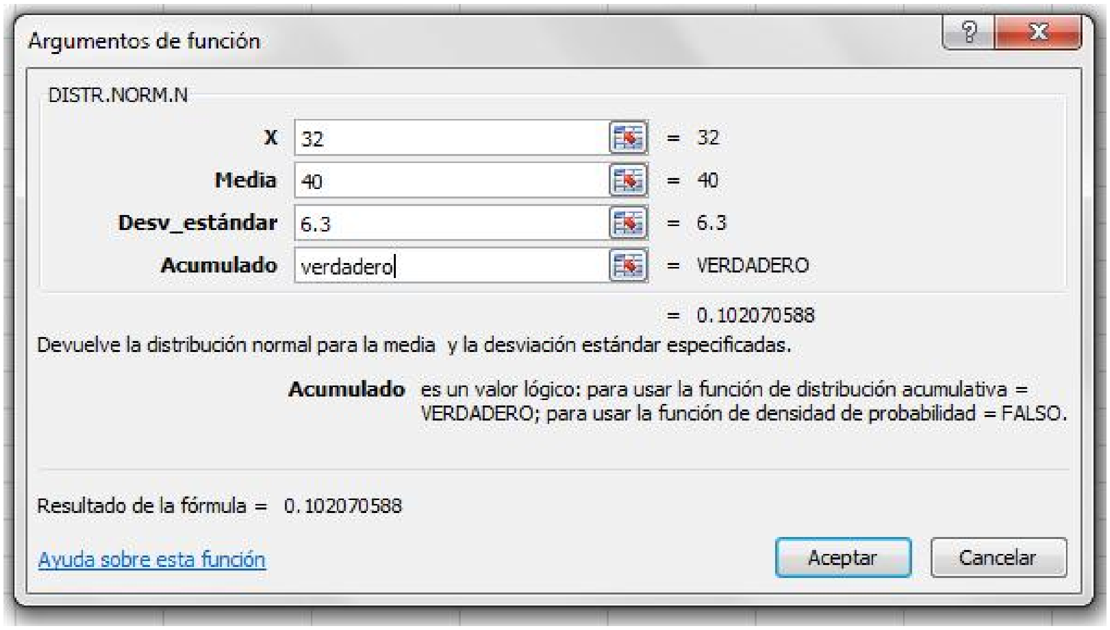
a. más de 32 meses
b. entre 37 y 49 meses

Datos $\mu = 40$ $\sigma = 6.3$

, f(x)= $\frac{1}{\sqrt{2®}} * \frac{1}{6.3} * \exp - \frac{(x-40)^2}{2 * 6.3^2}$ = 0.063324* e $^{-(x-40)^2/79.38}$

P (x > 32) = $\int_{32}^{\infty} f(X)dx$ = 1 - $\int_{-\infty}^{32} f(X)dx$ = 1-0.1021 = 0.8979

Resolviendo con funciones de Excel
=DISTR.NORM(32,40,6.3,VERDADERO) = 0.1021



b. P (37 < x < 49) = $\int_{37}^{49} f(X)dx$ = 0.6064

P(x < 49) – P(x < 37)= 0.9234 – 0.3169 = 0.6064

Con funciones de Excel
=DISTR.NORM(49,40,6.3,VERDADERO)=0.9234
=DISTR.NORM(37,40,6.3,VERDADERO) =0 .3169

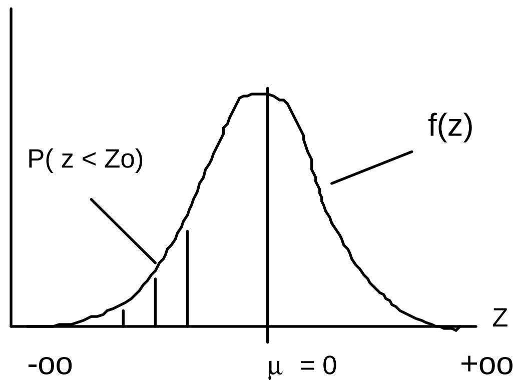
Resuelva

5.10 Los alambres que se utilizan en un equipo eléctrico deben tener entre 0.12 y 0.14 ohms de resistencia. La resistencia real de los alambres producidos por la compañía A tienen una distribución de probabilidad normal con media 0.13 ohms y desviación estándar de 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que un alambre seleccionado al azar de la producción satisfaga las especificaciones?
R: 0.9544

8. Distribución Normal Estándar

Z es una variable normal estándar si tiene media cero y desviación estándar uno, $\mu = 0$, $\sigma = 1$, su función de densidad de probabilidad es:

$$f(z) = [\ 1/\ (\ 2\pi)^{-0.5}\ e\text{xp}\ (\ -z^2\ /\ 2)$$



Característica de la distribución normal tipificada (reducida, estándar)

No depende de ningún parámetro
Su media es 0, su varianza es 1 y su desviación típica es 1.
La curva f(x) es simétrica respecto del eje Y
Tiene un máximo en este eje Y
Tiene dos puntos de inflexión en z =1 y z = -1
Cuando x es menor que la media el valor de z es negativo
Cuando x es mayor que la media el valor de z es positivo
Cuando x es igual a la media el valor de z es cero

Para calcular probabilidades de ocurrencia de los valores de una variable aleatoria normal estándar, como en cualquier variable continua, se debe encontrar el área bajo la curva que describe la función de densidad, siendo la función de distribución acumulada como sigue:

$$F\ (\ Zo) = 1\ /\ (2\pi)^{0.5} \int_{-oo}^{z_o} e\text{xp}(\ -\ z^2/2)\ dx$$

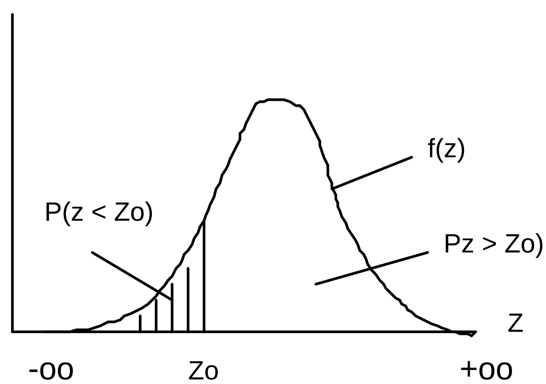
Y representa la probabilidad de que la variable z sea menor o igual a z_o.

$F(Zo) = P(z \leq Zo)$

Se hace uso de esta función para calcular las probabilidades en cualquier otro caso, así:

$P (z > Zo) = 1 - P(z \leq Zo)$

$P (z_1 \leq Z \leq z_2) = P (z \leq z_2) - P (z \leq z_1)$



Este procedimiento se hace sencillo al utilizar las tablas de la distribución Normal Estándar, las cuales presentan las áreas acumuladas para diversos valores de la variable Z, el lector puede remitirse a referencias bibliográficas para verificar el procedimiento.

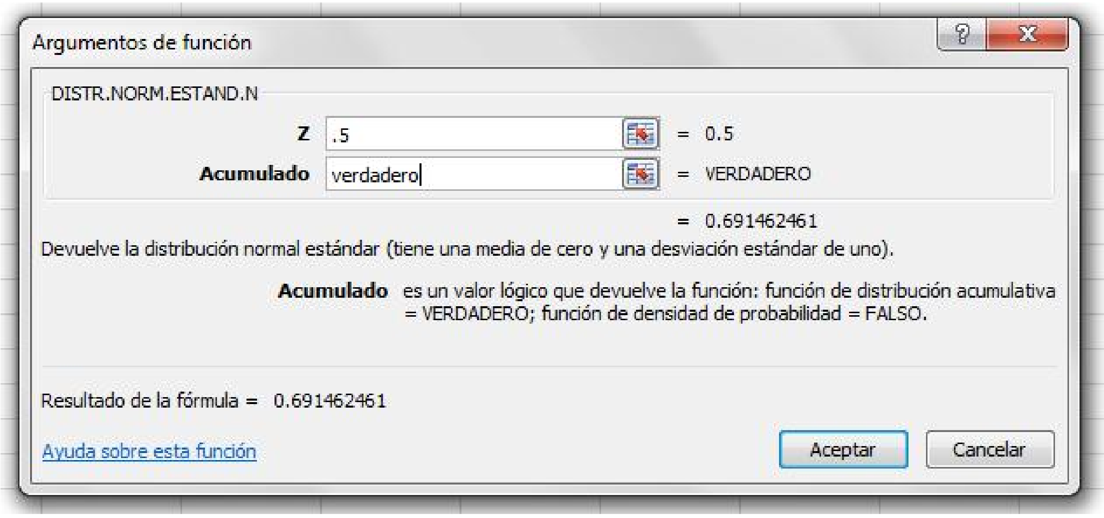
Ejemplos:

5.21 Si Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar:

A. La probabilidad de que z sea menor o igual a 0.5 se calcula:

$$P(Z \leq 0.5) = F (Zo = 0.5) = 1 / (2\pi)^{0.5} \int_{-oo}^{0.5} exp (- z^2/2) dz = 0.695$$

Resolviendo con ayuda de las funciones de Excel



B. La probabilidad de que Z sea mayor o igual a -2.15 se calcula:

$P(Z \geq -2.15) = 1 - P(Z < -2.15) = 1 - F (Zo = -2.15) = 1 - 0.0158 = 0.9842$

C. La probabilidad de que Z se encuentre en el intervalo [-1.02, 2.05] se calcula:

$P (-1.02 \leq Z \leq 2.05) = P (Z \leq 2.05) - P(Z \leq -1.02) = F (Zo = 2.05) - F (Zo= -1.02)$

$P (-1.02 \leq Z \leq 2.05) = 0.9798 - 0.1539 = 0.8259$

Propiedades

A. Cualquier transformación lineal Y, de una variable aleatoria normal X, sigue teniendo una distribución normal.

Si X es una Variable con media μ y desviación estándar σ, es decir varianza σ^2. Entonces Y = AX + B tiene una distribución Normal con media:

$A\mu + B$ y varianza $A^2 \sigma^2$

Una variable aleatoria normal X se estandariza al expresar su valor como el número de desviaciones estándar a la izquierda o a la derecha de su media.

Si la variable X tiene media y desviación estándar conocidas, entonces la variable estandarizada de X es $Z = (X- \mu) /\sigma$ que es una transformación lineal de X.

La transformación lineal $Z = (X - \mu) / \sigma$, si la Variable X es Normal, tiene una distribución Normal Estándar, con media cero y varianza 1.

Esta transformación hace que la distribución Normal Estándar sea primordial en el cálculo de las probabilidades de las variables normales en general, ya que toda variable X con distribución normal puede representarse en términos de una variable Z, con distribución Normal Estándar, siempre que se conozcan los parámetros media y varianza, esto se consigue con la transformación lineal a través de la función
$Z = (X - \mu) / \sigma$

$P (X < Xo) = P [(X - \mu) / \sigma < (Xo - \mu) / \sigma] = P(Z < Zo)$

Ejemplo:

5.22 La distancia X a la que un atleta puede ejecutar un tiro es una variable aleatoria que se describe de acuerdo a una distribución normal con media 50 pies y varianza 25 pies ^{2}.

a. La probabilidad de que este atleta efectúe un tiro a 55 pies o más es:

$P (X \geq 55) = P (Z \geq (55 - 50) / 5) = P (Z \geq 1) = 1 - P (Z < 1)$
$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

b. La probabilidad de que un tiro del atleta quede a una distancia entre 50 y 60 pies es:

$P (50 \leq X \leq 60) = P ((50- 50) / 5 \leq Z \leq (55-50)/5) = P (0 \leq Z \leq 2)$

$= P (Z \leq 2) - P (Z \leq 0) = 0.9772 -0.5 = 0.4772$

Resuelva

5.23 Suponga que los diámetros de los tornillos fabricados por una compañía están distribuidos normalmente con media 0.25 y desviación estándar 0.02, Si se consideran defectuosos si su diámetro es menor que 0.2 y mayor que 0.28 ¿cuál es la probabilidad de que un tornillo seleccionado al azar sea defectuoso?

$P(X< 0.2) + P(X> 0.28) = P (Z < -2.5) + P(Z> 1.5)=$
$0.0062 + 0.0668 = 0.0730$

B. Si X_i es una variable aleatoria normal con media μi y desviación estándar σ_i, entonces $Y = \Sigma X_i$, para i = 1, 2, 3, 4, 5, ..., n tienen una distribución normal con media $\Sigma\ \mu_i$ y varianza $\Sigma\ \sigma_i^2$ siempre que las variables Xi sean todas independientes.

Ejemplo:

5.24 Tres resistencias se conectan en serie, los valores nominales de dichas resistencias son 10, 15, 20 ohms respectivamente, si la resistencia de cada una puede considerarse como una variable normal con media igual a sus valores nominales y que cada una tiene una desviación estándar de 0.5 ohm. La probabilidad de que la conexión tenga una resistencia mayor que 46.59 ohm se calcula de la forma siguiente:

X_i = resistencia de cada componente i = 1, 2, 3

$Y = X_1 + X_2 + X_3$ = resistencia de la conexión

Y es una variable normal con media 45 (10+15+20) y varianza 0.75 (3*0.25)

$$P (Y > 46.59) = 1 - \int_{-oo}^{46.59} (1 / [(2\pi)^{0.5} * 0.75]\ e\text{xp}(-0.5[(x-45/0.75]^2) dx = 0.0418$$

Otra opción para resolver el problema es transformar la variable a Z

$P (Z > (46.5 - 45) / 0.866) = P (Z > 1.73) = 1 - P (Z< 1.73)$

$= 1- 0.9582 = 0\text{-}0418$

9. Teorema Central de Límite

Sin duda el resultado más notable de la teoría estadística que fue establecido en 1733 por De Moivre, este teorema explica por qué la distribución normal aparece con tanta frecuencia en fenómenos biológicos, físicos, químicos, etc.

Este teorema establece que la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tiene a seguir una distribución normal.

Con el nombre de efecto del límite central se conoce el hecho de que cuando una variable Y es el resultado de la contribución de muchas causas Xi que actúan de manera independiente, cada una de ellas tiene una contribución pequeña en el valor final de la variable y el modelo normal suele ser un patrón razonable para esa variable Y

Teorema:

Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} Xi$

Donde Xi son variables aleatorias independientes cuyas distribuciones de probabilidad pueden ser arbitrarias o incluso desconocidas. Suponga que sus respectivos valores esperados y varianzas de tales variables aleatorias son:
E(Xi)= μi V (Xi)= σi^{2} Entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{Y - \sum_i \text{«}i}{\sqrt{\sum_i \pm i^2}}$$

Tiene una distribución de probabilidades que se aproxima a la distribución normal estándar conforme n tiene a infinito.

En muchas situaciones se considera que una variable aleatoria representa la suma de un número considerable de variables aleatorias independientes, gracias a este teorema se sabe que la variable aleatoria que resulta de sumar todas estas variables se aproxima a una con distribución normal.

Radica la importancia de este teorema en la tendencia a la Distribución Normal Estándar de Z_n cuando n crece, independiente de la distribución original de X, y es fundamental en las aplicaciones de inferencia estadística, ya que muchos estimadores están representados por sumas de observaciones muestrales.

Ejemplo

5.25 Al sumar números en una computadora, se aproxima cada número al entero más cercano. Suponiendo que todos los errores son independientes y distribuidos uniformemente en el intervalo [-0.5, 0.5]. La probabilidad de que la magnitud del error total al sumar 1500 números exceda de 15 es aproximadamente igual a 0.09 y se calculó con el procedimiento siguiente.

E = error total = ΣE_i

E_i = error de aproximación del número i i = 1,2,3...1500

$\mu_i = [-0.5+ 0.5] / 2 = 0$

$V_i = [0.5 - (-0.5)]^2 / 12 = 0.083$

$\mu(E) = 0$

$V(E) = 1500 (0.083) = 125$

$P (E > 15) = P (Z > [15 -0] / 11.18) = P (Z > 1.34) = 1- 0.9099 = 0.09$

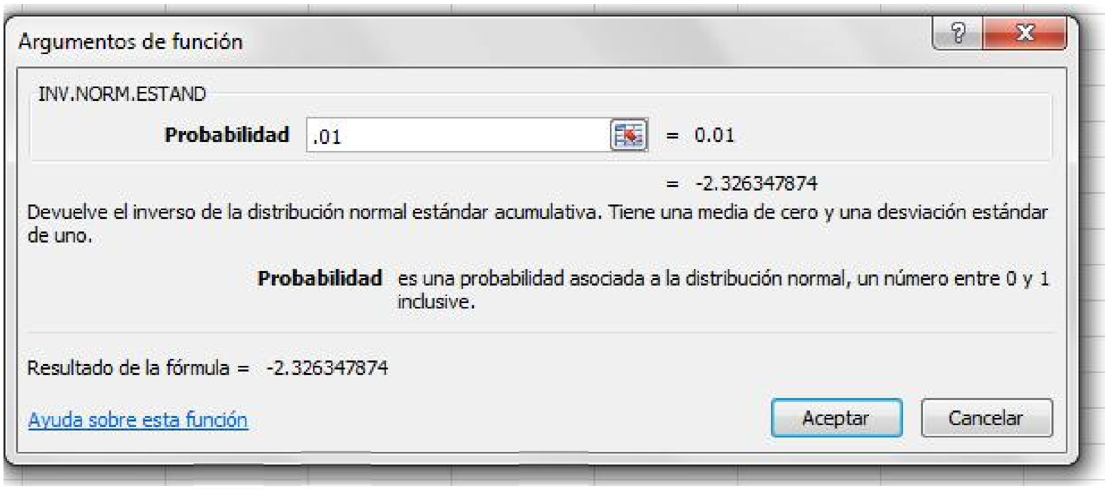
5.26 La resistencia de un hilo es una variable aleatoria cuyo promedio es 0.5 libras y una desviación estándar de 0.2 libras. Suponga que la resistencia de una cuerda es la suma de las resistencias de los hilos que la forman. Calcular la probabilidad que una cuerda de 100 hilos, tenga una resistencia de más de 45 libras.
X es la variable aleatoria “resistencia de la cuerda” X tiene una distribución con media $100 * 0.5 = 50$ y una varianza $100 * 0.2^2 = 4$

$P(X > 45) = P(z > 2.5) = 1-0.0062 = 0.9938$

De cuantos hilos se necesitan en la cuerda para que tenga una resistencia de más de 50 libras con una probabilidad de 0.99
$P(X > 50) =0.99$ entonces $P (Z > Zo) = 0.99$

$$F(Z < Zo) = 1 - 0.99 = 0.01 = 1 / (2\pi)^{0.5} \int_{-oo}^{Zo} exp(- z^2/2)\, dx$$

$Zo = -2.33$



-2.33= (50 - n(0.5) / [$\sqrt{n}$* 0.2] = -0.46 $\sqrt{n}$ = 50 - 0.5n
0.5n - 0.466 $\sqrt{n}$ -50 = 0 entonces n = 109.91 hilos

Resuelva:

5.27 Una máquina fabrica resistores eléctricos con una resistencia media de 40 ohms y una desviación estándar de 2 ohms. ¿Cuál es la probabilidad que una serie de 36 resistencias seleccionadas al azar tenga una resistencia combinada de 1458 ohms?
R: 0.0668

10. Aproximación de la distribución Binomial a la distribución Normal

En el modelo de la distribución Binomial cuando el número de pruebas de Bernoulli a repetir, n, es grande y la probabilidad de éxito es próxima a 0.5, la distribución de probabilidades de la variable aleatoria "Número de éxitos en las n pruebas" presenta un modelo simétrico similar al de la distribución normal y matemáticamente puede demostrarse que:

P (A < X < B) tiende a P ($Z_1 < Z < Z_2$) donde,

$Z_1 = [X_1 - np] / (npq)^{1/2}$

$Z_2 = [X_2 - np] / (npq)^{1/2}$

y $X_1 = A + 0.5$, $X_2 = B - 0.5$

Se recomienda la aproximación de Bimonial a la Normal si np y n (1-p) son mayores que 5

Ejemplo

5.28 Se lanzan 49 monedas legales y X representa el número de caras que aparecen.
X es una variable aleatoria Binomial con n = 49, p= 0.5, q= 0.5
A. La probabilidad de que X sea a lo más 28 es:

$P(X \leq 28) = P(Z \leq [28.5 - 49*0.5] / (49*0.5*0\text{-}5)^{1/2}) = P(Z \leq 1.14) = 0.872$

B. La probabilidad de que X sea mayor que 20 pero menor que 25,
P (20 <X < 25) es igual a:

$P([20.5 - 49*0.5] / (49*0.5*0\text{-}5)^{1/2} < Z < [24.5 - 49*0.5]/(49*0.5*0\text{-}5)^{1/2})$

$P(-1.14 < Z < 0) = 0.5 - 0.1271 = 0.3729$

5.29 Suponga un sistema que está formado por 100 componentes cada uno de los cuales tiene una confiabilidad de 0.95 Si estas componentes funcionan independientemente y si el sistema completo funciona cuando al menos 80 componentes funcionan ¿cuál es la confiabilidad del sistema?
La confiabilidad del sistema es la probabilidad de que funciones al menos 80 componentes $P(X \geq 80)$

Por aproximación a la normal
np = 100 * 0.95 = 95 npq = 100 * 0.95* 0.05= 4.75

$P(X \geq 79.5) = P(Z \geq -7.1124) = 1$

Resuelva

5.30 De un examen de selección múltiple se seleccionan 80 preguntas cada una con cuatro posibles respuestas pero solo una respuesta correcta. ¿Cuál es la probabilidad que una persona que contesta al azar tenga de 25 a 30 respuestas correctas?
R: 0.1196

11. Problemas resueltos

5.31 Cierta fábrica de manufactura requiere de un producto específico a granel, la cantidad de producto que diariamente utiliza se puede modelar por una distribución Exponencial con media 4 toneladas, la probabilidad de que la fábrica utilice más de 4 toneladas en un día determinado es.

X se define como la variable "toneladas a utilizar en un día determinado"

X tiene una distribución exponencial con $\beta = E(X) = 4$

$P(X > 4) = e^{-4/4} = 0.3678$

Qué cantidad de producto habría que almacenar para que la probabilidad de agotar existencia sea solamente 0.05

$P(X > Xo) = 0.05 = e^{-x/\beta} = e^{-X/4}$

X = 11.98 toneladas.

5.32 Los tiempos de espera de los clientes que pasan por la caja registradora a la salida de una tienda son variables aleatorias independientes, cada una con media 1.5 minutos y varianza 1 minuto. La probabilidad aproximada de que se puedan atender a 100 clientes en menos de dos horas (120 minutos) es:

Sea Yi el tiempo de espera del i ésimo cliente

Sea X el tiempo de espera de los 100 clientes

$X = \Sigma Yi$ entonces: $E(X) = 100 * 1.5 = 150$ y $V(X) = 100 * 1 = 100$

$P(X < 120) = P(Z < (120-150) / 10) = (Z < -3) = 0.0013$

5.33 Se colocan 25 focos de luz infrarroja en un invernadero de tal manera que si falla un foco se encienda el otro inmediatamente, los focos funcionan independientemente y la vida útil de cada uno es una variable distribuida de forma Exponencial con media 50 horas ($\beta = 50$). Si no se inspecciona el invernadero durante 1300 horas, después de instalar el sistema, la probabilidad de que un foco esté encendido al final de 1300 hora se calcula de la forma siguiente:

Xi es la variable "Vida Util del foco i"

Y es la variable Tiempo de funcionamiento de los 25 focos, $Y = \Sigma Xi$

$E(Y) = 25 * 50 = 1250$ $V(Y) = 50^2 * 25 = 62500$
$P(Y \geq 1300) = P(Z \geq (1300 - 1250) / 250) = P(Z \geq 0.2) = 0.4207$

5.34 La cantidad de café en litros, que despacha una máquina vendedora instalada en la sala de espera de una terminal de autobuses, es una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme $f(x) = 1/3$ cuando $7 \leq X \leq 10$

La probabilidad que en determinado día el café despachado por esta máquina sea más de 7.41 litros pero menos 9.51 litros es:
$P(7.41 < X < 9.54) = (9.51 - 7.41) * (1/3) = 0.7$

5.35 Según las publicaciones de la revista Época, los censos muestran que el 53% de las viviendas familiares de la ciudad están ocupadas por 3 o 4 personas. Suponiendo que este porcentaje es válido. La probabilidad que de 1000 viviendas seleccionadas al azar, por lo menos 52% estén ocupadas por 3 o 4 personas es:

X= Número de viviendas ocupadas por 3 o 4 personas
X es una variable Binomial con
$n = 1000$ $p = 0.53$ $q = 0.47$

Considerando que es válido aplicar la aproximación a la normal
$P(X \geq 520) = P(Z \geq (519.5 - 530) / (1000*0.53*0.47)^{1/2}) =$
$P(Z \geq -0.67) = 0.2514$

5.36 El tiempo requerido para ensamblar una pieza es una variable aleatoria con distribución normal con media 12.9 minutos y desviación estándar 2 minutos.

a. La probabilidad que el ensamblado de tal pieza tarde al menos 11.5 minutos es:
$P(X \geq 11.5) = P(Z \geq 811.5 - 12{,}9) / 2) = p(Z \geq -0.7) = 1 - 0.242 = 0.758$

b. La probabilidad de que el tiempo de ensamblado de la pieza esté entre 11.0 y 14.8 minutos es:
$P(11 \leq X \leq 14.8) = P((11 - 12.9)/2 \leq Z \leq (14.6 - 12.9)/2) =$
$P(-0.95 \leq Z \leq 0.95) = 0.8289 - 0.1711 = 0.6578$

5.37 Suponga que los clientes llegan a una caja a razón de 2 por minuto con una distribución de Poisson, calcular al varianza y el promedio de tiempo que transcurre entre llegadas sucesivas de clientes.
X tiempo que transcurre entre llegadas sucesivas de los clientes

$E(X) = 1/2 = 0.5$ minutos
$V(X) = 1/4 = 0.25$ minutos^2

Si a un empleado le toma 3 minutos atender al primer cliente que llega ¿cuál es la probabilidad que por lo menos un cliente esté esperando cuando termine de atenderlo?

Y = número de clientes que llegan en el intervalo de tres minutos

$P(Y \geq 1) = 1- P(X= 0) = 1 - e^{-6} (6)^{0} / 0! = 0.9975$

¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de que se termine de atender al primero) = $P(X \leq 3) = 1- e^{-6} = 0.9975$

5.38 Para decidir cuantos representantes para servicio al cliente debe contratar, una importante empresa de venta de procesadores de texto estudió el tiempo de reparación de los mismos. El estudio reveló que los tiempos de reparación tienen una distribución Exponencial con promedio 22 minutos (β= 22 minutos)

a. Hallar la probabilidad que el tiempo de reparación sea menor que 10 minutos $P(X<10) = 1- e^{-10/22} = 0.3652$

b. El costo de la reparación es de $50 por cada media hora o fracción. Cuál es la probabilidad de que una reparación cueste $100 .

$P(30 < X \leq 60) = [1- e^{-60/22}] - [1- e^{-30/22}] = e^{-1.3636} - e^{-2.7272} =$
$0.2557 - 0.0654 = 0.19029$

c. Para planear el programa, ¿cuánto tiempo debe asignarse a cada reparación para que la probabilidad de que cualquier tiempo sea mayor que el tiempo programado sea solo 0.1?

T = tiempo programado

$P(X > T) = 0.1 = e^{-T/22}$ entonces $T = -\ln 0.1 * 22 = 50.65 = 51$

5.39 Una refinería de azúcar tiene 3 plantas de proceso y todas reciben azúcar a granel. La cantidad de azúcar que puede procesar una planta en una hora se puede representar con una distribución exponencial con promedio 4 toneladas por cada planta. Si las plantas trabajan en forma independiente, calcule la probabilidad que exactamente 2 de las 3 plantas procesen más de 4 toneladas en una hora determinada.

X= Cantidad de azúcar producida por cada planta

$P(X > 4) = e^{-4/4} = e^{-1} = 0.37$

Y= Número de plantas que procesan más de 4 toneladas en una hora.

$P(Y = 2) = {}_3C_2\ 0.37^{2}\ 0.63^{1} = 0.2587$

5.40 El tiempo de viaje de camiones que transportan concreto hacia una obra en construcción, está distribuido uniformemente en un intervalo de 50 a 70 minutos
Si se sabe que la duración de un viaje fue mayor que 55 minutos ¿cuál es la probabilidad que el viaje haya durado más de 65 minutos?

X= tiempo de viaje de los camiones
f(X) = 1/20
P(X > 65 / X > 55) = P(X > 65) / P(X > 55)= (5/20) / (15/20)= 1/3

5.41 Suponga que X, el tiempo de supervivencia, en minutos, de un ratón macho seleccionado al azar y expuesto a 240 rads de radiación gamma, tiene una distribución Gamma con $\alpha = 8$ y $\beta = 15$.

El tiempo esperado de supervivencia es 8*15= 120

La varianza del tiempo de supervivencia es $8*15^2 = 1800$, por lo que la desviación estándar es 42.43

La probabilidad de que el ratón sobreviva entre 60 y 120 minutos se determina de la forma siguiente:

$f(x) = [\ 1/ [15^8 * 7!]\ \ X^7 e^{-x/15} = 7.74175\ E\ {-14}\ (X^7 e^{-x/15})$

$P(60 < X < 120) = \int_{60}^{120} 7.74175\ E\ {-14}\ (X^7 e^{-x/15}) = 0.496$

Por probabilidad acumuladas P(X < 120) - P(X < 60) = 0.5403916 - 0.05113

5.42 Una variable tiene distribución normal con desviación estándar 21.5. Hallar la media, si la probabilidad de que la variable tome un valor menor que 180.5 es 0.8849.

P(X < 180.5) = 0.8849 entonces, transformando a la variable Z,
P(Z < 1.20) = 0.8849
1.20 = (180.5 - μ) / 21.5 entonces μ = 154.7

5.43 La cantidad semanal, que una compañía gasta en mantenimiento, tiene una distribución normal con promedio $400 y desviación estándar $20. Si el presupuesto para cubrir los gastos de mantenimiento para la semana siguiente es $450 ¿cuál es la probabilidad que los costos reales sean mayores que la cantidad presupuestada?

P(X > 450) = P (Z > (450 - 400) / 20) = P(Z > 2.5) = 1- 0.9938= 0.006

¿De cuánto debe ser el presupuesto semanal para que tan solo se rebase con una probabilidad de 0.1?

$P(X > Xo) = 0.1 = P(Z > (Xo - 400) / 20)$
$P(Z > 1.28) = 0.1$
$Z= 1.28 = (Xo - 400) / 20$ entonces Xo es $400 + 25.6 = 425.6$

5.44 Suponga que 30 instrumentos electrónicos se usan de forma siguiente, Tan pronto falla D_1 empieza a funcionar D_2, tan pronto falle D_2 empieza a funcionar D_3, .. etc.
Suponga que el tiempo de falla de Di es una variable Exponencial con promedio 10 horas, si T es el tiempo total de operación de los 30 instrumentos ¿cuál es la probabilidad de que T exceda de 350 horas?

$E(Ti) = 10$ $V(Ti) = 100$
$T = \Sigma Ti$ $i = 1,2,3,...30$
$P(T > 350) = P(Z > (350 - 30*10) / (30*100)^{1/2} = P(Z > 0.9127) =$
$1- 0.8185 = 0.1814.$

5.45 Una aerolínea encuentra que el 5 % de las personas que hacen una reservación para cierto vuelo no se presentan al aeropuerto.

a. Si la aerolínea vende 160 boletos para un vuelo con 155 asientos disponibles ¿cuál es la probabilidad que todas las personas que se presenten y tengan una reservación consigan un lugar?

$$P(X \leq 155) = \sum_{0}^{155} {}_{160}C_x * 0.95^x * 0.05^{160-x}$$

Aproximando a la distribución Normal

$E(X) = np = 160*0.95 = 152$ $V(X)= 160*0.95*0.05 = 7.6$
$\sigma = 2.757$

$P(X > 155) = P(Z < (155.5 -152) / 2.757) = P(Z < 1.27) = 0.898$

¿Cuál es la probabilidad de que deban venderse al menos 170 boletos para que el vuelo salga con 155 pasajeros?

$E(Y) =155/0.95= 163.16$
$V(Y) =(155*0.05/0.95^2) = 8.59$

$P(Y \geq 170) = P(Z \geq (169.5- 163.16) / (8.59)^{0.5})$
$p(Z \geq 2.16) = 0.0154$

5.46 Los conductores que se fabrican para utilizarse en un sistema necesitan tener una resistencia que varíe entre 0.12 y 0.14 ohm. Las resistencias reales medidas de los conductores que produce la compañía XZ tiene una distribución normal con media 0.13 y desviación estándar 0.005, ohm. Calcule la probabilidad de que un conductor seleccionado al azar cumpla con las especificaciones.

$P(0.12 < X < 0.14) = P((0.12-0.13)/0.005 < Z < (0.14-0.13) / 0.005) =$
$P(-2 < Z < 2) = 0.9772 - 0.0228= 0.9544$

Si se usan 4 de esos conductores en el sistema, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro cumplan con las especificaciones?

p = probabilidad de que un conductor cumpla con las especificaciones p = 0.9544

X= número de conductores que cumplen con las especificaciones.

$P(X= 4) = p^4 = 0.9544^4 = 0.8297$

5.47 Una llamada telefónica llega a un conmutador en un tiempo al azar dentro de un intervalo de 1 minuto. El conmutador estuvo ocupado durante los 15 segundos finales en ese periodo.
Calcule la probabilidad de que la llamada llegara cuando el conmutador no estaba ocupado.

X= tiempo, en segundos, en el que llega la llamada
$0 < X \leq 60$
$f(x) = 1/60 \quad a = 0 \quad b = 60$
$P(0 < X < 45) = 45/60 = 0.75$

5.48 En una zona de los Estados Unidos, se puede modelar la magnitud de los terremotos mediante una distribución exponencial cuyo promedio es de 2.4 grados en la escala Richter. Calcular la probabilidad que el siguiente temblor que se presente en esa zona sea entre 2 y 3 grados en la escala Richter

$\beta= 2.4$
$f(x) = (1/2.4) * e^{- x/2.4}$
$P(2 \leq X \leq 3) = (1 - e^{-3/2.4}) - (1- e^{-2/2.4}) = (1- e^{-1.24}) - (1- e^{- 0.833}) =$
$0.7135 - 0.5654 = 0.1481$

5.49 Las descomposturas de un robot industrial siguen una distribución de Poisson con promedio 0.5 descomposturas por día (8 horas de trabajo). Si se pone en servicio este robot al principio del día, calcule la probabilidad de que:

a. No se descomponga durante el día

X= número de descomposturas por día
$P(x = 0) = e^{-0.5} = 0.6065$

b. Trabaje por lo menos 4 horas antes de la primera descompostura
t= tiempo que transcurre hasta la primera descompostura
λ = 0,0625 descomposturas por hora
β = 1/ 0.0625 = 16 horas
$P(t > 4\text{ h}) = e^{-4/16} = e^{-0.25} = 0.778$

5.50 La proporción del tiempo por día que todas las cajas registradores de un supermercado se encuentran ocupadas es una variable aleatoria Y con distribución Beta, y parámetros $\alpha = 3$ $\beta = 5$, determine la probabilidad que Y sea mayor que 0.7

$\Gamma(\alpha+\beta) / (\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)) = \Gamma(8) / (\Gamma(3)\,\Gamma(5)) = 105$

$f(Y) = 105\, y^{2} (1-y)^{4}$

$P(Y > 0.7) = \int_{0.7}^{1} f(y)\, dy = 0.02879$

5.51 El tiempo para que ocurra una falla, en horas, en el rodamiento de un eje mecánico se modela satisfactoriamente como una variable Weibull, con parámetros $\beta = 0.5$ y $\alpha = 0.014142$

Determine el tiempo promedio para que ocurra una falla
$E(X) = 0.014142^{-2}\ \Gamma(1+2) = 5000.0959 * 2! = 10000.19$ horas

Determine la probabilidad de que el rodamiento dure por lo menos 6000 horas
$P(X \geq 6000) = 1- P(X < 6000) =$
$P(X < 6000)\ \ 1- \exp(-0.014142(6000)^{0.5}) = 1- 0.3344 = 0.6656$
$P(X > 6000) = 1 - 0.6656 = 0.3344$

5.52 Suponga que el tiempo en horas que toma reparar una bomba de agua es una variable aleatoria X con distribución Gamma con α=2 y β=1/2.

¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente servicio tome cuando mucho una hora?
$f(X) = (1/(0.5^{2}\,\Gamma(2)))\, x^{2-1}\ e^{-2x} = 4x\, e^{-2x}$

$P(X \leq 1) = \int_{0}^{1} 4xe^{-2x} = 0.59394$

¿ Cuál es la probabilidad de que al menos se requieran dos horas para reparar la máquina?

$P(x \geq 2) = 1- P(X<2) = 1 - \int_0^2 4x\, e^{-2x} = 1- 4 * 0.27715 =$

$1- 0.90842 = 0.09158$

5.53 De los clientes que entran a una exposición de equipos estéreo, solo el 30% compra. Si en una mañana entran 40 clientes, ¿cuál es la probabilidad que por lo menos 15 hayan comprado?

$P(X > 15) = P(Z > (14.5 - 40 * 0.3) / (40 * 0.3 * 0.7)^{0.5} = P(Z> 0.8625) =$
$1- 0.8051= 0.1949$

5.54 Si el número de llamadas telefónicas que entran a una central de un edificio de oficinas es de 4 por minuto, en promedio. Calcule la probabilidad que lleguen menos de 1900 llamadas en un día de trabajo de 8 horas.

8 horas= 480 minutos
$\lambda s = 4 * 480 = 1920$ llamadas por día de trabajo
$P(X < 1900) = P(Z < (1899.5 - 1920) / (1920)^{0.5} = P(Z < - 0.47) = 0.3192\}$

12. Problemas propuestos

5.55 Se selecciona aleatoriamente un punto sobre el intervalo [0,10], ¿Cuál es la probabilidad de que el punto se encuentre entre 1.5 y 3.5 ? R:0.2

5.56 El tiempo transcurrido hasta la falla para un cinescopio de televisión se estima que se distribuye exponencialmente con media de 3 años. Una compañía ofrece un seguro para este cinescopio para los primeros 5 años de uso. ¿Qué porcentaje de las pólizas tendrá que pagar por reclamaciones? R:0.811

5.57 La resistencia a la rotura en Newtons de una tela sintética se denota mediante X y se distribuye de acuerdo a la Normal con media 800 y varianza 144. El comprador de la tela exige que ésta tenga una resistencia de al menos 772 N. ¿Cuál es la probabilidad, que al probar una muestra de tela, cumpla con las exigencias del comprador. R:0.9812

5.58 Un establecimiento ha observado que los vehículos permanecen en él 45 minutos en promedio y que este tiempo de estacionamiento sigue una distribución Exponencial. ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo seleccionado al azar permanezca a lo sumo 30 minutos? R:0.4866

5.59 La captura diaria de un pescador de langostas es el total Y de libras de langostas capturadas en un número fijo de trampas. Si la captura media por trampa es de 30 libras con una desviación estándar de 5 libras y si el pescador tiene 50 trampas ¿Qué probabilidad hay de que el pescador pesque más de 1450 libras de langosta en un día? R:0.9207

5.60 El encargado de bodega de un almacén coloca piezas en una plataforma para transportada a la sala de ventas. Cada pieza pesa 0.5 libras con una desviación estándar de 0.05 libras. El peso máximo que soporta la plataforma es de 200 libras. Si se carga la plataforma con 395 piezas que probabilidad hay que exceda el peso máximo? R: 0.0059

5.61 Los niveles máximos de inundación, en millones de pies cúbicos por segundo, de determinado ríos, tiene una distribución de Weibull, con $\beta = 1.5$ y $\alpha = 1.667$. Estimar la probabilidad de que el nivel máximo de inundación para el año próximo sea mayor que 0.5. R: 0.5547

5.62 Una universidad espera recibir para el siguiente año escolar 16000 solicitudes de ingreso al primer año de Licenciatura., Se supone que las calificaciones obtenidas por los aspirantes en la prueba SAT se puede modelar de manera adecuada por la distribución Normal con media 950 y desviación estándar 100. Si la universidad decide admitir al 25% de todos los aspirantes que tengan las calificaciones más altas en la prueba SAT, un estudiante que tienen una calificación de 965 ¿tiene la oportunidad de ser admitido? R: no

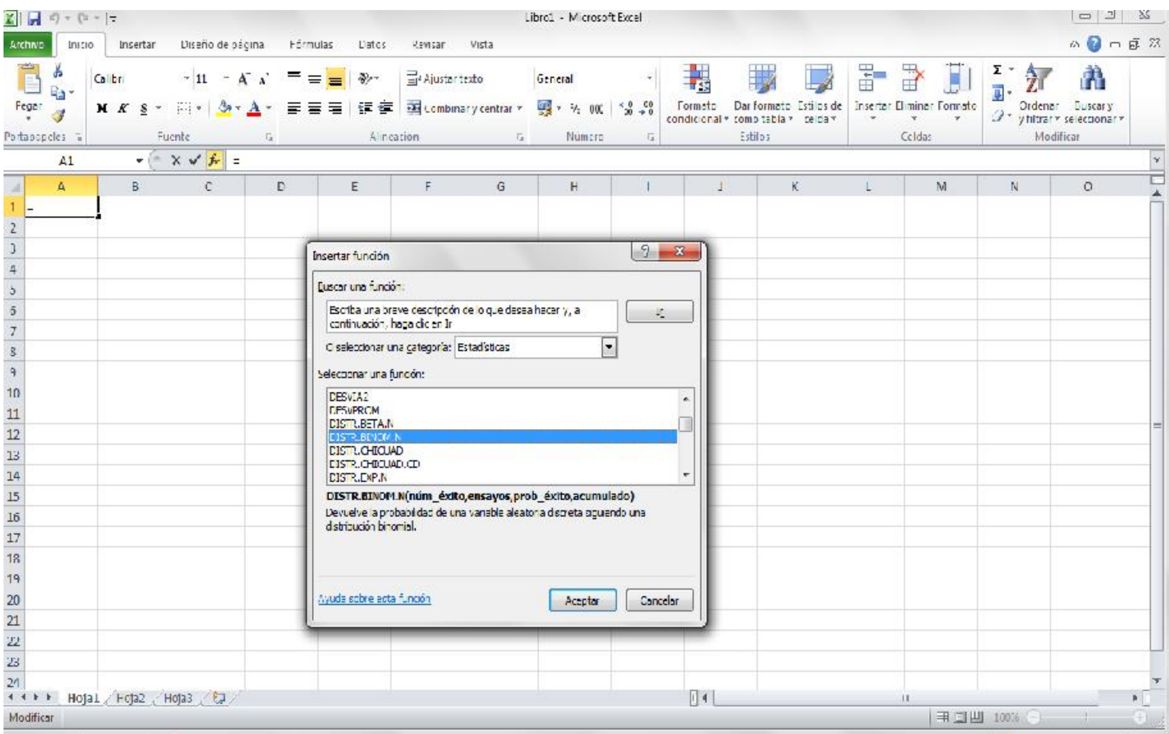
5.63 Cierta fábrica de manufactura requiere de un producto específico a granel, la cantidad de producto a utilizar se puede modelar por una distribución Exponencial con promedio 4 toneladas. ¿Qué cantidad de producto habría que almacenar para que la probabilidad de agotar existencias sea solamente de 0.05? R: 11.98

APÉNDICE 1

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON AYUDA DE LAS FUNCIONES DE EXCEL

En este apéndice se ilustra el uso de la hoja electrónica Excel y sus funciones estadísticas que son útiles para resolver problemas relacionados con distribuciones de probabilidad.

Es pertinente recordar al lector, familiarizado con Excel, que para utilizar éstas funciones debe ingresar a la hoja electrónica, pulsar en Σ más funciones, y en el cuadro que aparece seleccionar "Estadísticas", de forma automática se listarán todas las opciones disponibles en la columna "Nombre de la función", en ese listado deberá señalar la función deseada.



Para la presentación del uso de las funciones se tomaron los ejemplos incluidos en los capítulos 4 y 5, facilitando de esta forma la interpretación de los resultados mostrados por el software, por lo que el lector puede referirse los capítulo señalado para recordar el procedimiento de solución analítico.

1. Distribuciones discretas de probabilidad

Distribución uniforme discreta

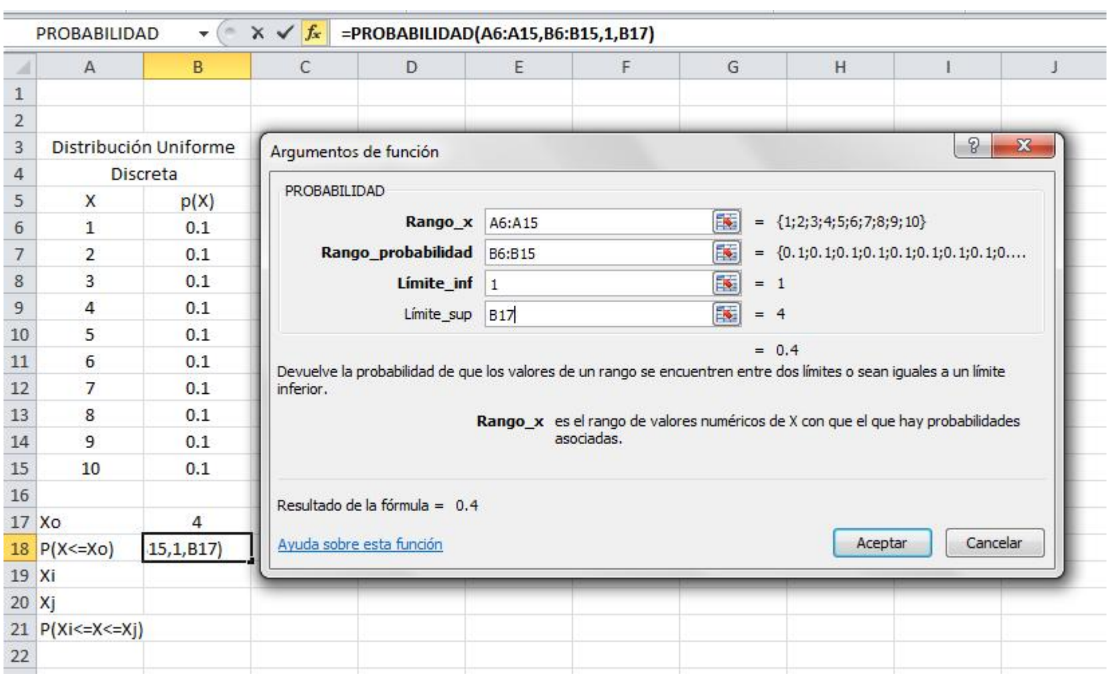
Ejemplo 4.1

Para un número de lotería premiado, se selecciona el valor del premio mediante la selección de una etiqueta al azar de una caja que contiene 10 numeradas del 1 al 10, el valor de la etiqueta es la cantidad de quetzales que corresponden al premio.

¿Cuál es la probabilidad que gane a lo más cuatro quetzales?
Probabilidad acumulada: $P(X \leq 4) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = 0.4$

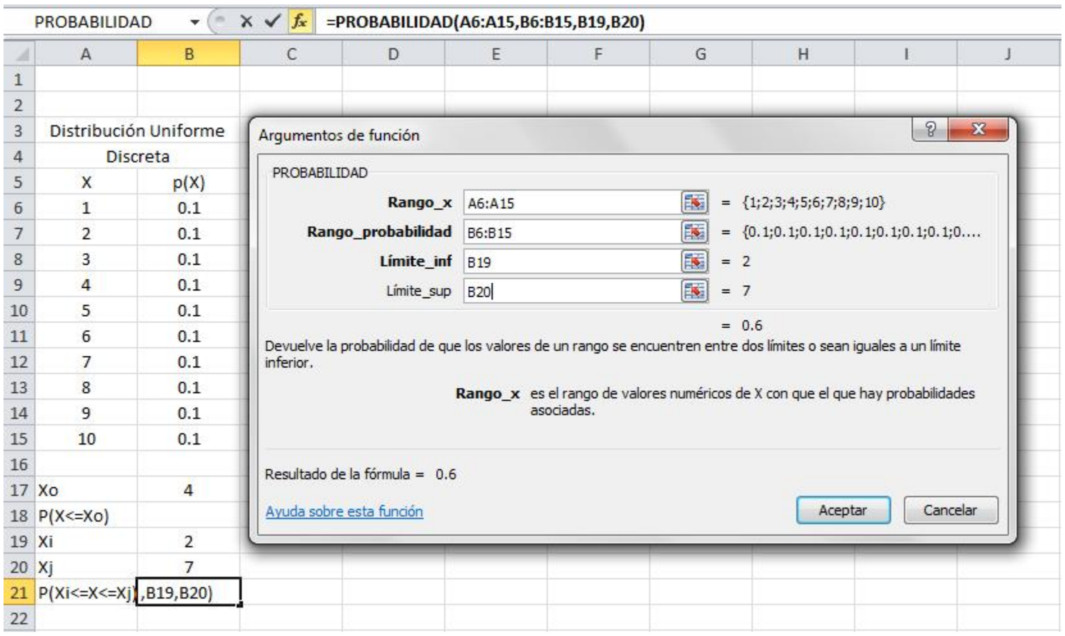
- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "PROBABILIDAD" de Excel

Devuelve la probabilidad de que los valores de un rango se encuentren entre dos límites o sean iguales a un límite inferior.



¿Cuál es la probabilidad de que gane entre 2 y 7 quetzales?

Probabilidad de un suceso: P $(2 \leq X \leq 7) = 0.6$



Distribución binomial

Ejemplo 4.3

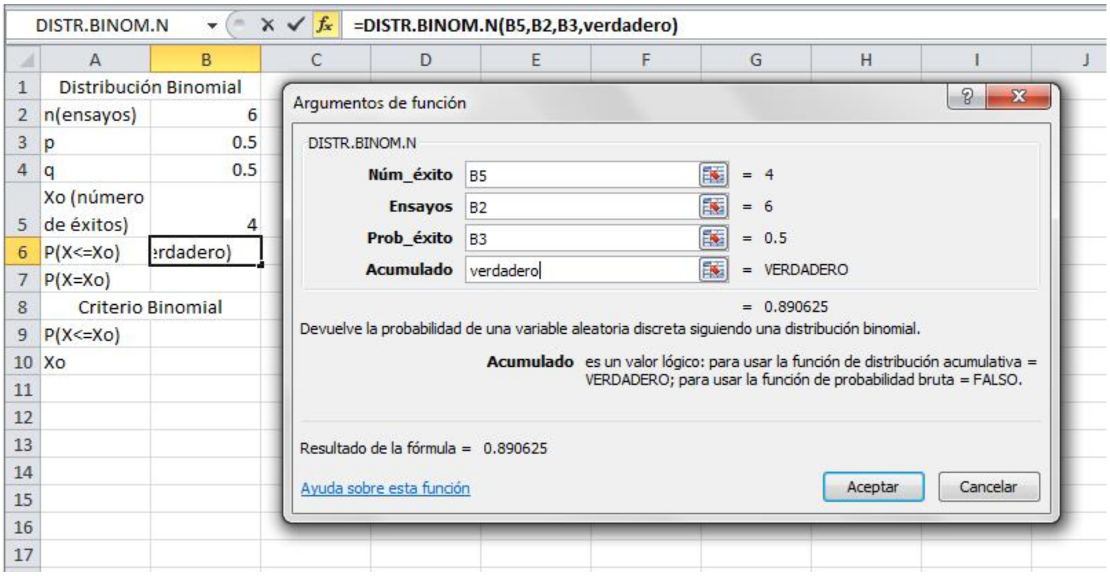
Se lanzan 6 monedas legales, sea X la variable aleatoria que representa en número de caras que aparecen en los seis lanzamientos.

¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan como máximo cuatro caras?

Calculando la probabilidad acumulada: P $(X \leq 4) = 0.8906$

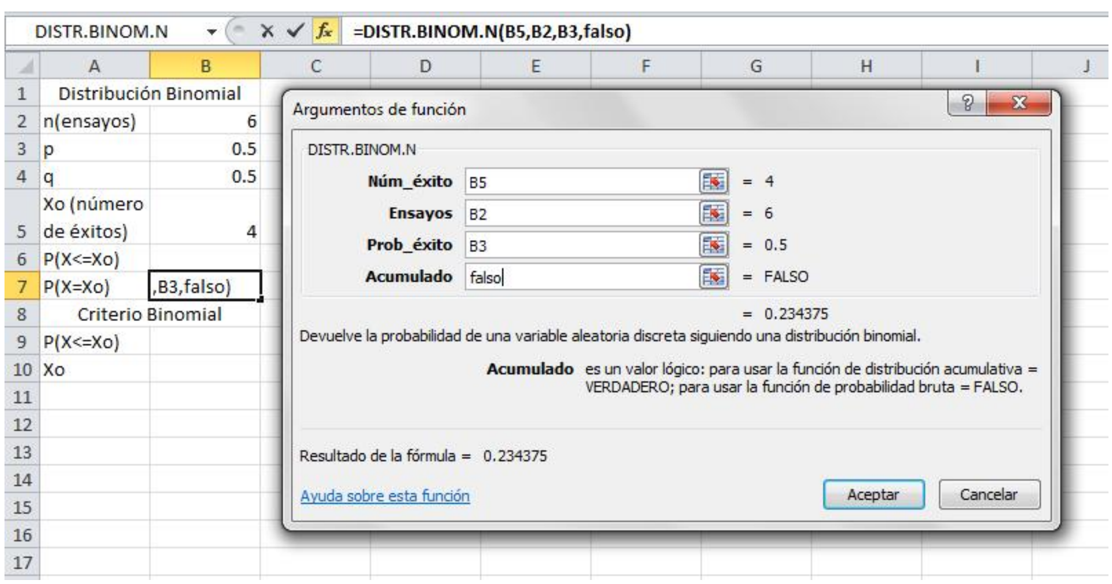
- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “DISTR.BINOM.N” de Excel

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria discreta siguiendo una distribución Binomial.



¿Cuál es la probabilidad que aparezcan exactamente cuatro caras?

Probabilidad puntual: P(X = 4) = 0.2343

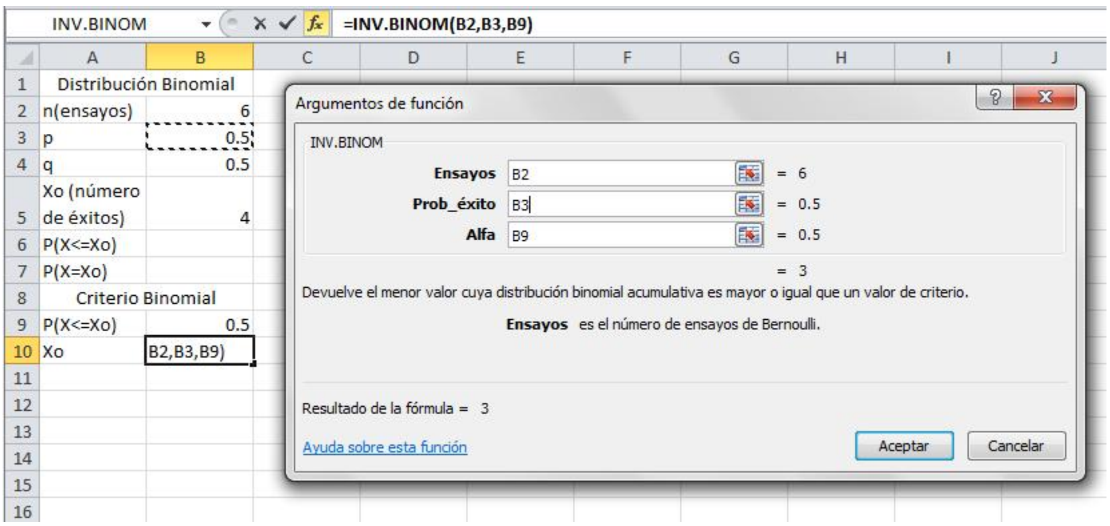


¿Cuál es el valor de la variable que tiene un valor de probabilidad acumulada mayor o igual a 0.5?

Valor de la variable que tiene un valor de probabilidad acumulada mayor o igual al especificado: P(X ≤ Y) = 0.5. El valor que corresponde a la variable es Y = 3.

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “INV.BINOM” de Excel

Devuelve el menor valor cuya distribución binomial acumulativa es mayor o igual a un valor de criterio.



Distribución binomial negativa

Ejemplo 4.6

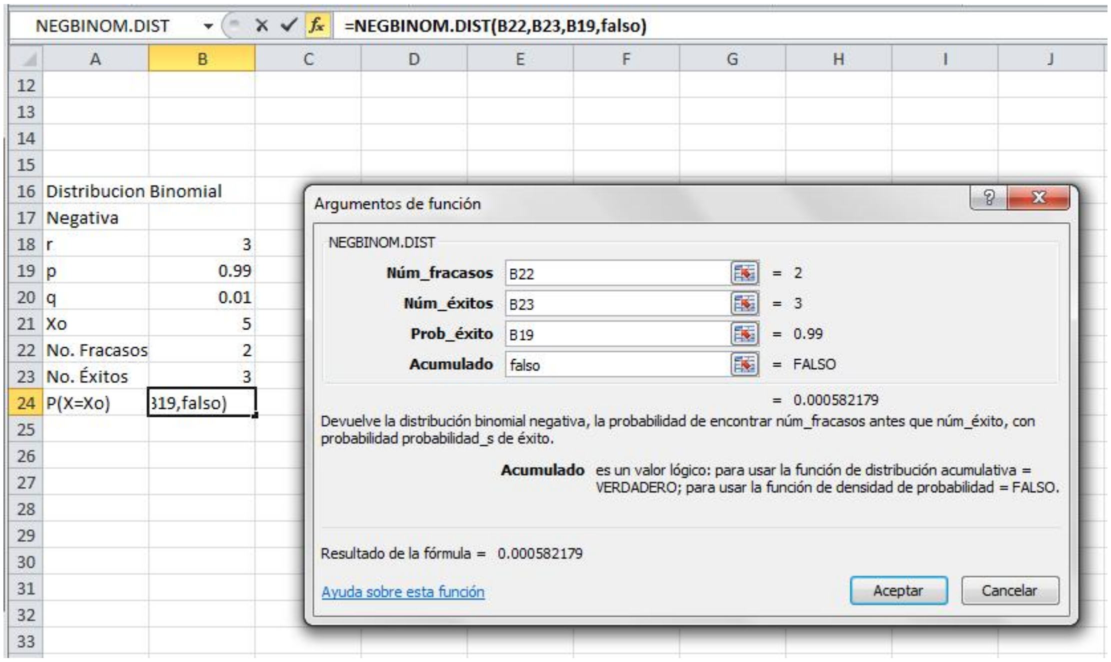
Suponga que una compañía que fabrica transistores, según su experiencia, considera que la probabilidad de que cualquiera de los transistores producidos esté defectuoso es 1 %.

¿Cuál es la probabilidad de tener que examinar 5 transistores para encontrar 3 en buenas condiciones?

Distribución de probabilidad puntual: P (X = 5) = 0.00058

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “NEGBINOMDIST” de Excel

Devuelve la distribución de probabilidad Binomial Negativa. La probabilidad de encontrar num_ fracasos antes que num_ éxitos con probabilidad_s éxito



Distribución Geométrica

Ejemplo 4.9

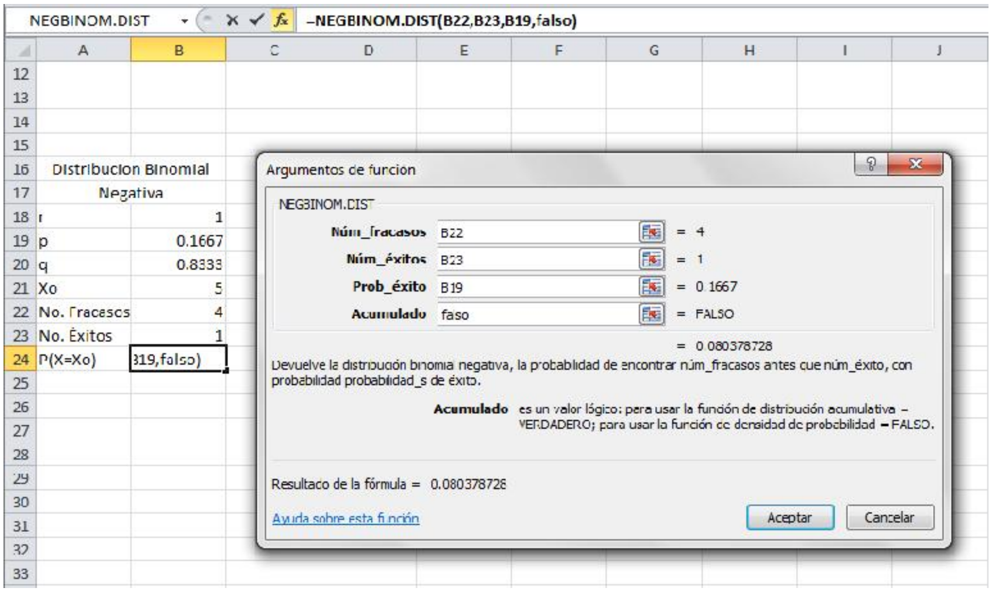
Hallar la probabilidad que en lanzamientos sucesivos de un dado resulte un dos por primera vez en el quinto lanzamiento.

Distribución de probabilidad Puntual: P (Y = 5) = 0.08037

Se recuerda que la distribución Geométrica es un caso especial de la distribución Binomial Negativa, cuando r = 1.

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “NEGBINOMDIST” de Excel

Devuelve la distribución de probabilidad Binomial Negativa. La probabilidad de encontrar num_ fracasos antes que num_ éxitos con probabilidad_s éxito



Distribución hipergeométrica

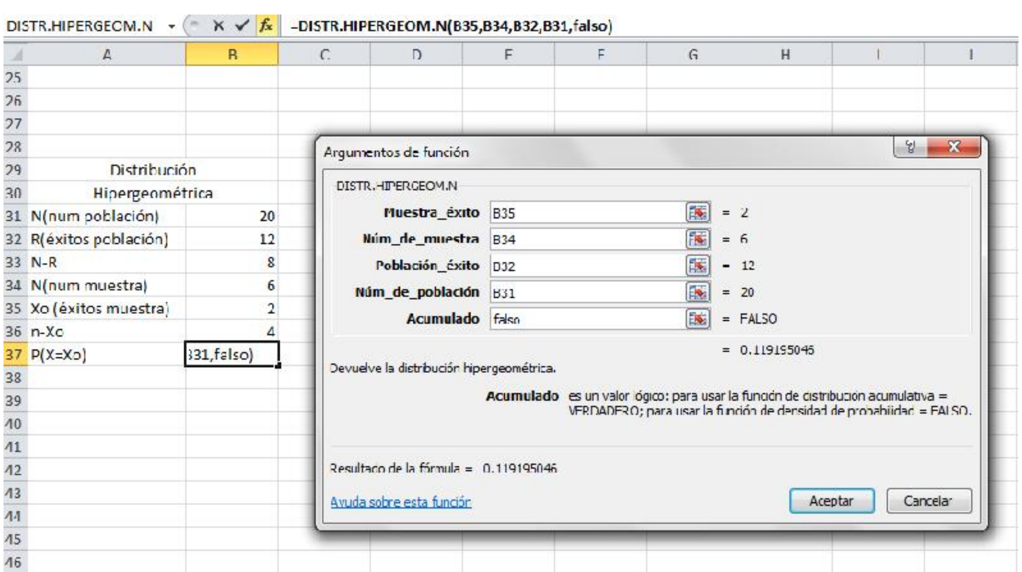
Ejemplo 4.15

De 20 aspirantes a una beca, 12 son guatemaltecos (A) y los demás de otros países de Centro América (A^c). Si se seleccionan al azar 6 aspirantes a la beca, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean guatemaltecos (A)?

Distribución de probabilidad puntual: P (X = 2) = 0.1191

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “DISTR.HIPERGEOM.N” de Excel

Devuelve la distribución Hipergeométrica.



Distribución de Poisson

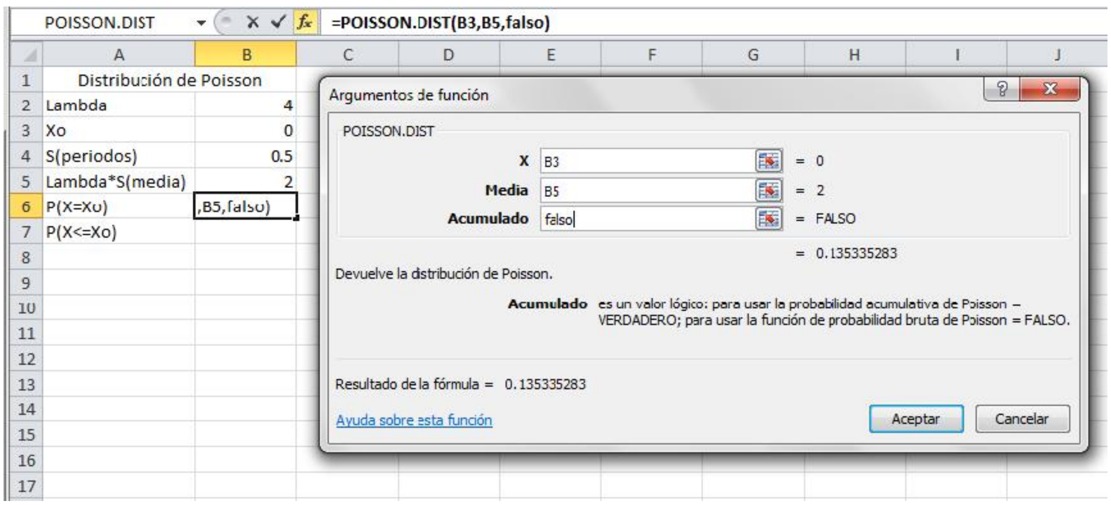
Ejemplo 4.21

Los clientes en un supermercado se forman en la caja a razón de 4 por minuto.
La probabilidad de que ningún cliente se forme en la cola en cualquier periodo de 30 segundos se calcula como la distribución de probabilidad puntual,
P (X = 0) = 0.1353

.

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "POISSON.DIST" de Excel

Devuelve la distribución de Poisson



Nota

La probabilidad de que a **lo más** un cliente se forme en la cola en cualquier periodo de 30 segundos se calcula como la distribución de probabilidad acumulada: P (X $\leq$ 1) = 0.4060

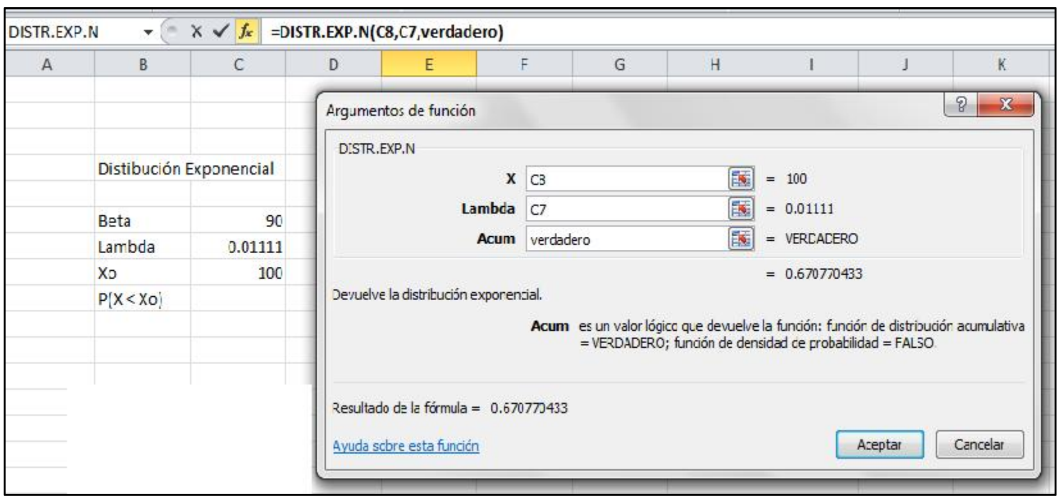
2. Distribuciones continuas de probabilidad

Distribución Exponencial

Ejemplo 5.4
Un componente de un equipo electrónico tiene una vida promedio de 90 horas; el tiempo de vida sigue una distribución exponencial.
¿Cuál es la probabilidad que el componente trabaje a lo más 100 horas?
X= tiempo de vida del componente
$P(X \leq 100) = 0.6708$

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "DISTR.EXP.N" de Excel

Devuelve la probabilidad de una variable continua siguiendo una distribución Exponencial.



Distribución Gamma

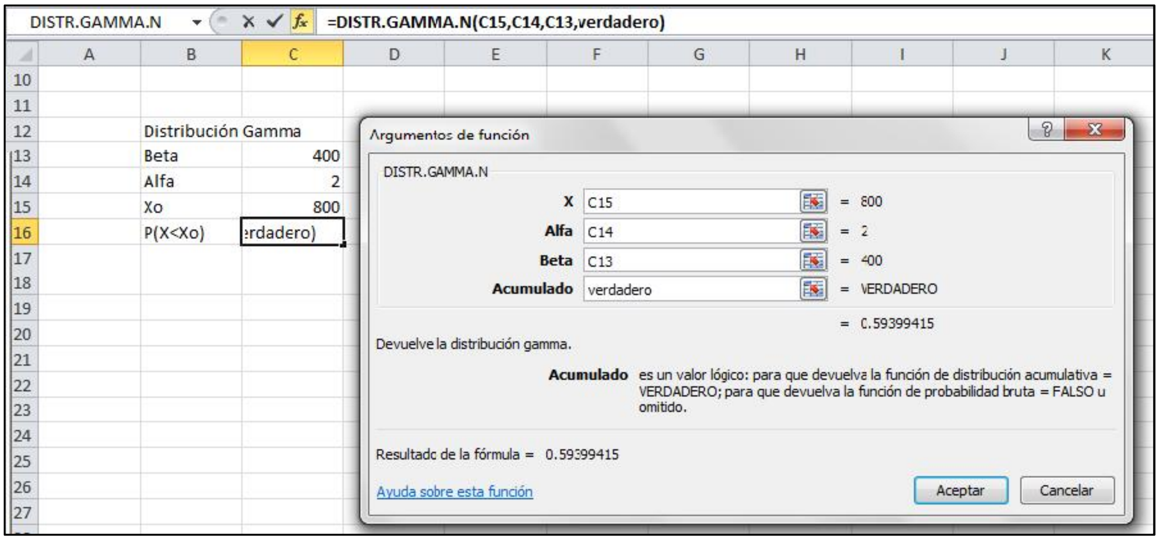
Ejemplo 5.9

Para un determinado sistema electrónico la vida útil se considera como una variable aleatoria con distribución Gamma con $\beta = 400$ $\alpha = 2$

¿Cuál es la probabilidad de que la variable sea menor o igual que 800?
X= vida útil del sistema
$P(X < 800) = 0.5939$

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “DISTR.GAMMA.N” de Excel

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria siguiendo una distribución Gamma.

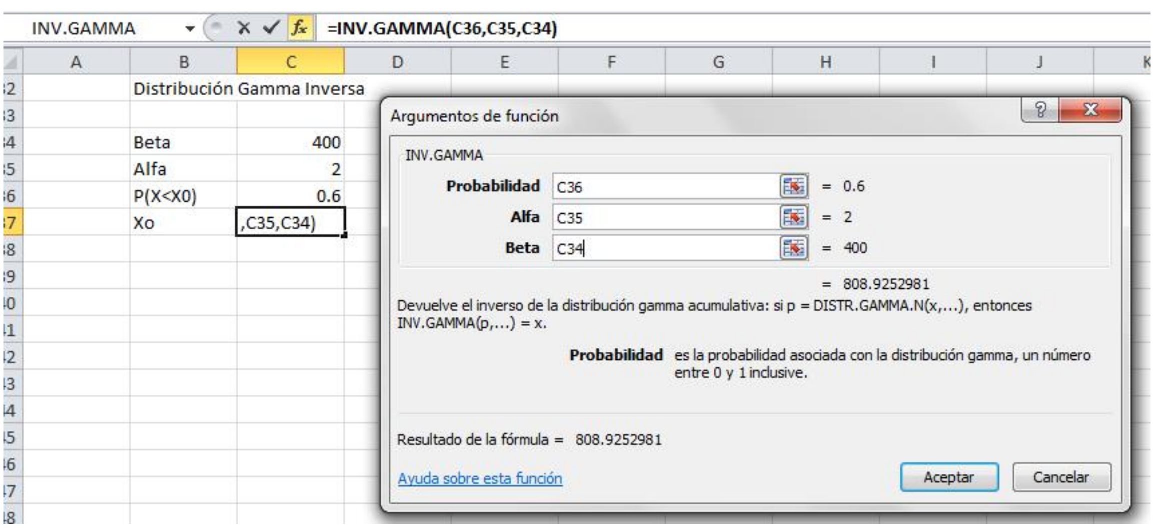


¿Cuál es el valor de la variable al que le corresponde una probabilidad acumulada de 0.6?

$P(X \leq Xo) = 0.6$ entonces Xo.= 808.92

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “INV.GAMMA” de Excel

Devuelve para una probabilidad dada el valor de la variable aleatoria siguiendo una distribución Gamma.



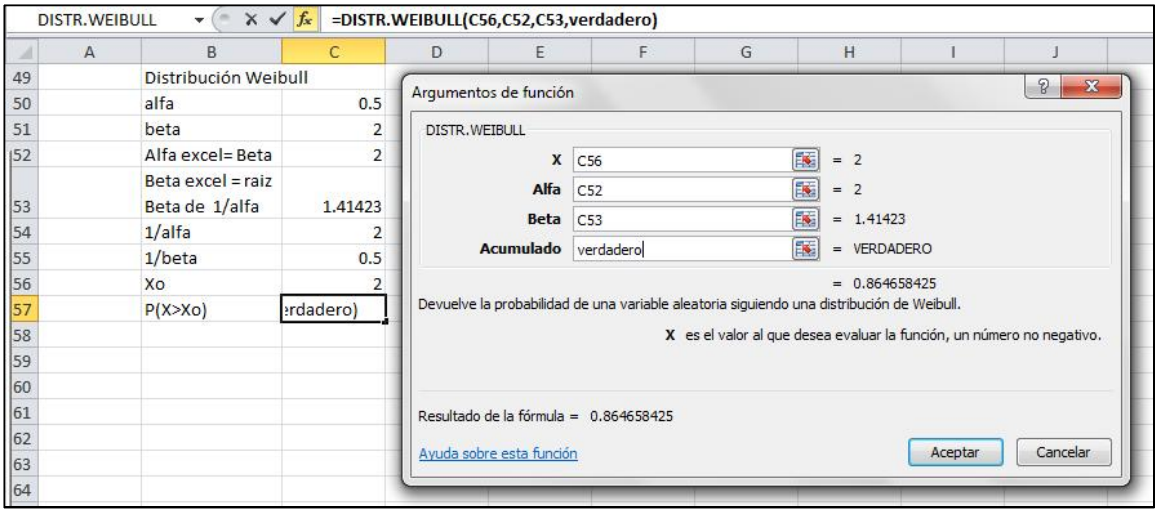
Distribución Weibull

Ejemplo 5.13

Suponga que la vida en años de una batería es una variable Weibull con α=1/2 y β = 2.
¿Cuál es la probabilidad que la batería dure a lo más 2 años? P(X < 2) = 0.8646

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "DIST.WEIBULL" de Excel

Devuelve la probabilidad de una variable aleatoria siguiendo la distribución Weibull



Distribución Beta

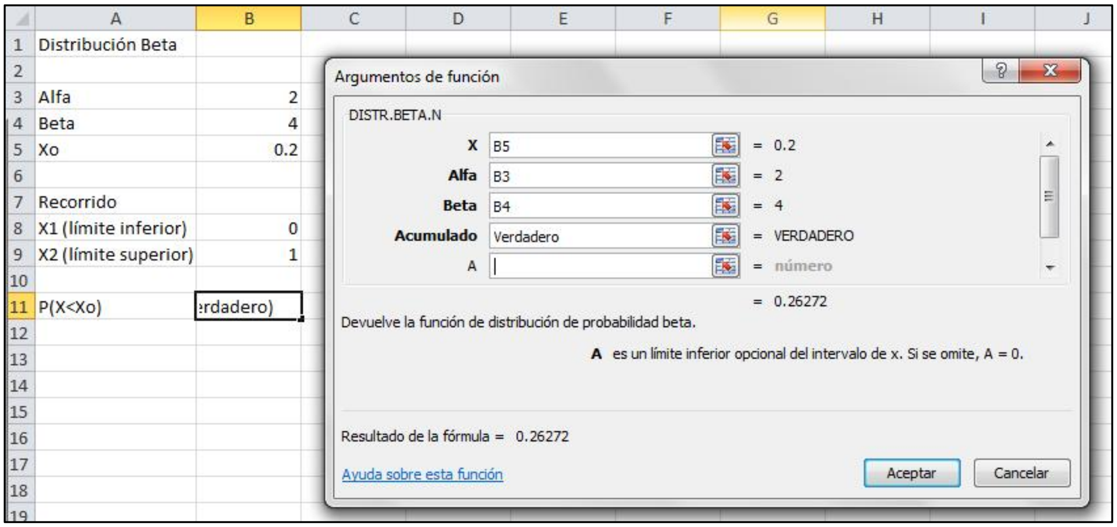
Ejemplo 5.16

Se determinó que el aprovechamiento de un núcleo de computadora, definido como una proporción de la capacidad total utilizada, tiene una distribución de frecuencias relativas que puede aproximarse mediante una función de densidad Beta con α = 2 y β = 4.

¿Cuál es la probabilidad de que la proporción del núcleo que se utiliza en un momento dado sea menor que 0.2?
P (X < 0.2) = 0.2627

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "DISTR.BETA.N" de Excel

Devuelve la distribución de probabilidad Beta acumulada.

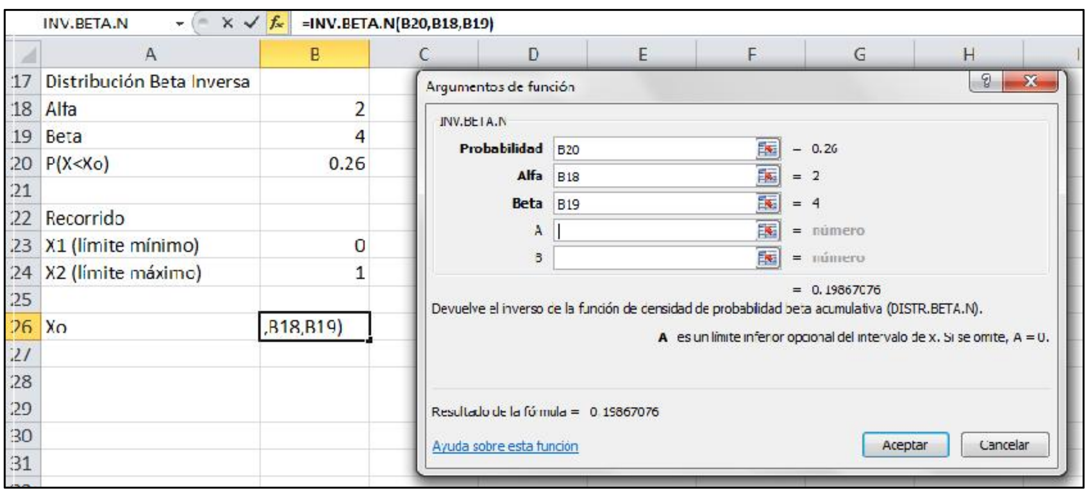


¿Cuál es el valor de específico de X, (Xo) , tal que la probabilidad acumulada al mismo sea igual a 0.26?

P (X<Xo) = 0.26, entonces, Xo = 0.1986

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN “INV.BETA.N” de Excel

Devuelve el inverso de la función de probabilidad Beta acumulativa



Distribución Normal

Ejemplo 5.22

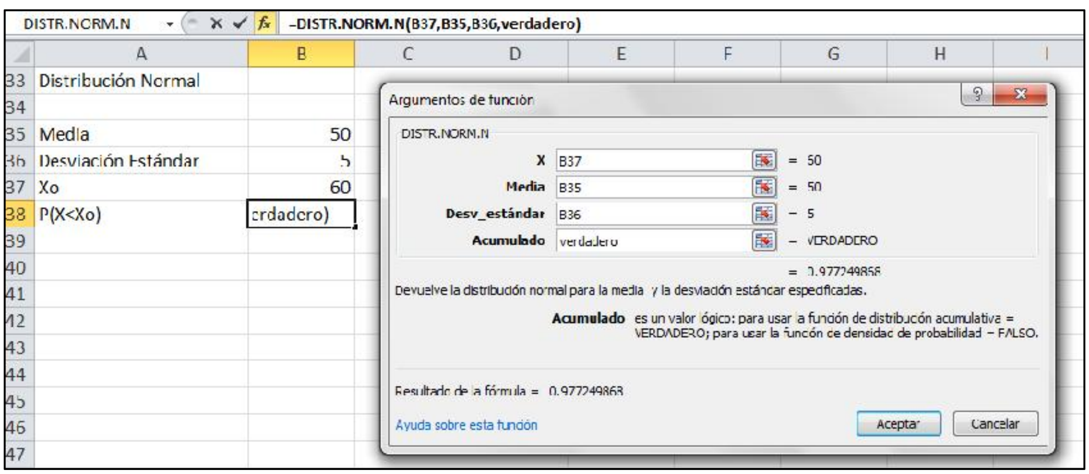
La distancia X a la que un atleta puede ejecutar un tiro es una variable aleatoria que se describe de acuerdo a una distribución normal con media 50 pies y varianza 25 $pies^2$.

¿Cuál es la probabilidad que se efectúe un tiro a una distancia máxima de 60 pies?

$P(X \leq 60) = 0.9772$

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "DIST.NORM.N" de Excel

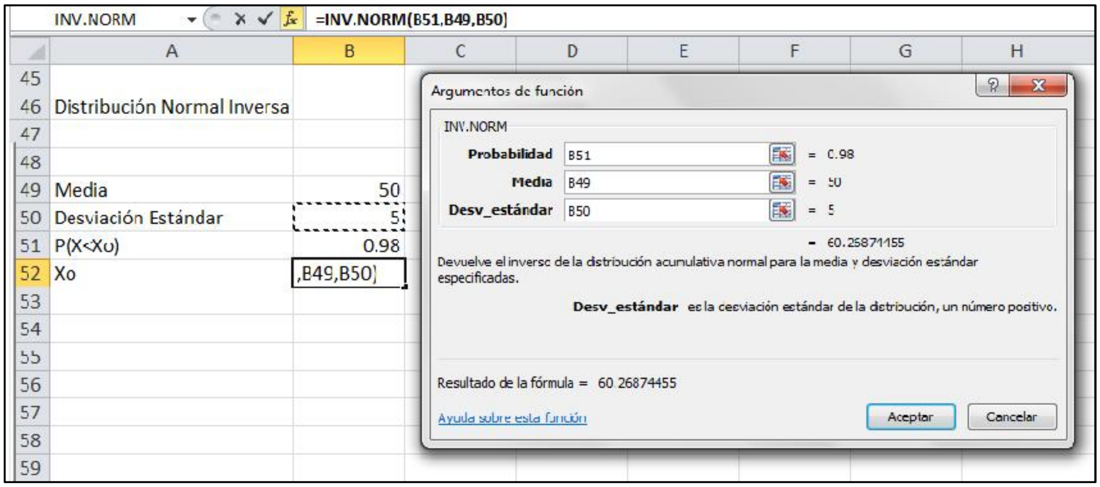
Devuelve la distribución acumulativa normal para la media y la desviación estándar especificadas.



¿A qué distancia máxima se ejecutará el tiro con una probabilidad de 0.98?
Xo = distancia máxima a la que se ejecuta el tiro
$P(X < Xo) = 0.98$, entonces $Xo = 60.26$ pies

- APLICACIÓN DE LA FUNCIÓN "INV.NORM" de Excel

Devuelve el inverso de la distribución acumulativa normal para la media y la desviación estándar específicas


INV.NORM
=INV.NORM(B51,B49,B50)
46 Distribución Normal Inversa
49 Media 50
50 Desviación Estándar 5
51 P(X<Xo) 0.98
52 Xo ,B49,B50)
Argumentos de función
INV.NORM
Probabilidad B51 = 0.98
Media B49 = 50
Desv_estándar B50 = 5
= 60.26874455
Devuelve el inverso de la distribución acumulativa normal para la media y desviación estándar especificadas.
Desv_estándar es la desviación estándar de la distribución, un número positivo.
Resultado de la fórmula = 60.26874455
Ayuda sobre esta función
Aceptar
Cancelar

APÉNDICE 2

MÉTODOS DE ENUMERACIÓN

Para calcular probabilidades de eventos que suponen la premisa de resultados igualmente probables, es necesario hacer una lista de todos los puntos muestrales, esto puede ser tedioso y se debe estar seguro que no se ha omitido ninguno de ellos; puesto que el número puede ser muy grande es conveniente conocer las herramientas que simplifiquen el cálculo del "número de puntos muestales" o elementos de S y además son útiles para contar el "número de casos favorables" a determinado suceso A o elementos de A-

Los siguientes son algunos procedimientos.

1. Principio de la multiplicación o regla del producto

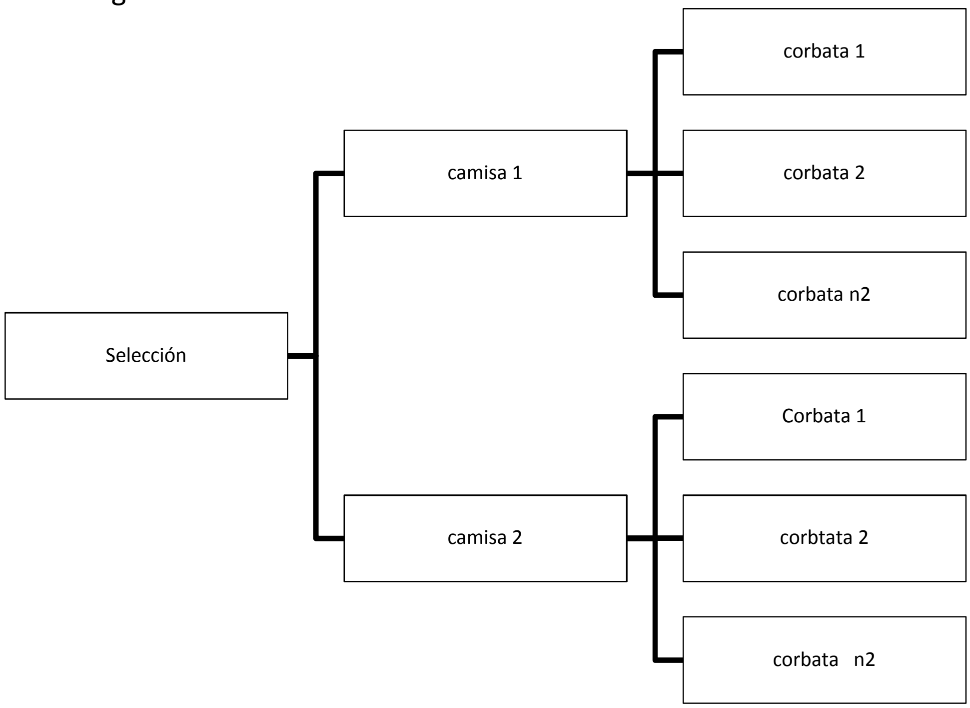
Si la tarea I puede hacerse de n_1 formas y la tarea II de n_2 formas, ambas no son excluyentes sino es posible realizarlas juntas o en sucesión, entonces, si se define un experimento como: Efectuar la tarea I y en seguida la tarea II, el espacio muestral del mismo está formado por $n_1 * n_2$ elementos.

Así: Si un hombre tiene 2 camisas y 4 corbatas entonces tiene 8 maneras de escoger una camisa y una corbata.

Diagrama de árbol (figura 2.1) permite representar la secuencia de tareas y las diferentes formas en las que se puede realizar cada tarea.

Este principio permite contar el número de pares que se pueden formar al seleccionar un elemento de cada uno de dos grupos y puede generalizarse para tres o más grupos encontrando el número de k- tetos ordenados.

Figura 2.1 Diagrama del árbol



Ejemplo:

1. Cuatro compañías tienen empleos disponibles en cada una de tres áreas: ventas, manufactura y personal, el número total de oportunidades de empleo que hay disponibles es: Número de compañías * Número de áreas de empleo
4 * 3 = 12 empleos.

2. Un empleado tiene facultad de escoger un curso de capacitación en finanzas o en administración de riesgos, los cuales se ofrecen en tres horarios, y con tres diferentes instructores en cada horario ¿cuántas opciones se ofrecen al empleado?
2*3*3 =18 opciones

Resuelva

3. En el año 2000 los números telefónicos eran de ocho dígitos de los cuales el primero tenía que ser 5 y el segundo no puede ser 0,1, ni 9 ¿cuántos números telefónicos se formarán con las restricciones? R:7 millones.

2. Principio de la adición

Si la tarea I puede realizarse de n_1 formas y la tarea II puede realizarse de n_2 forma, además, si las dos tareas en cuestión no son viables de realizarse juntas ni en sucesión, por ser mutuamente excluyentes. Si se define un experimentos como: Realizar la tarea I o la tarea II, el espacio muestral de éste está formado por $n_1 + n_2$ elementos. Principio que puede generalizarse a más de dos procedimientos.

Ejemplo:

4. Un producto puede fabricarse de dos formas automática o manualmente. Si hay tres máquinas automáticas y dos manuales. Las máquinas con que se cuenta para realizar el producto son 5, 3+2.

3. Permutaciones

Permutación también conocida como ordenación, es un arreglo de todo o parte de un número de objetos, los ordenamientos de los mismos elementos son considerados sucesos diferentes.

Caso 1: Todos los objetos son distinguibles

Se llama permutación de n objetos diferentes, ${}_nP_n$, a un arreglo de n objetos en orden definido.

El número de permutaciones posibles al arreglar n objetos es:

$${}_nP_n = n\,!$$

Si consideramos n objetos y deseamos permutar r de esos objetos (r<n) seleccionados al azar, el número de maneras de hacerlo es:

$${}_nP_r = n! / (n-r)!$$

Ejemplo

5. El número de ordenamientos diferentes que contiene tres letras cada uno y que se pueden formar con las siete letras: a, b, c, d, e, f, g es ${}_7P_3 = 210$ permutaciones

El número de ordenamientos de las siete letras es ${}_7P_7 = 5040$

6. ¿De cuántas manera pueden sentarse 10 personas en una banca que tiene cuatro puestos disponibles ${}_{10}P_4 = 5040$

7. Se inscriben A, B y C en una carrera. El número de formas en que se puede alcanzar la meta se calcula como un arreglo ordenado de 3 sujetos en tres lugares, esto es: ${}_3P_3 = 6$

Sea X el evento, A llega a la meta antes que C, el número de elementos que tiene el evento X se calcula como: $1 * {}_2P_2 + 1 * {}_1P_1 = 3$, que incluye el número de elementos que presentan a A en primer lugar o en segundo lugar antes que C

Resuelva

8. Se quieren sentar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse? R: 2880

Caso 2: Cuando no todos los objetos son distinguibles.

Aplicable cuando se requiere permutar un grupo de objetos que contiene algunos, que si bien son diferentes objetivamente, para fines prácticos se considera iguales o idénticos.

Suponiendo que se tienen n objetos tales que hay n_1 de la clase 1, n_2 de la clase 2...... y n_k de la clase k tales que $n_1+n_2+....+n_k = n$ el número de formas de ordenar esos objetos es:

$${}_nP_{n_1 n_2 \ldots n_k} = n! / (n_1 !* n_2! \ldots\ldots * n_k!)$$

Ejemplo

9. Una contraseña requiere de 5 letras, si se desea que ésta contenga tres letras A y dos letras B, ¿cuántas contraseñas diferentes se pueden formar?

${}_5P_{5, 3, 2} = 5! / (3! * 2!) = 10$

Resuelva

10. Considere 10 objetos, 5 de ellos son rojos, 3 amarillos y 2 azules, El número de formas de ordenar los 10 objetos es :

$${}_{10}P_{5,3,2} = 10! /(5!*3!*2!) = 2520.$$

Sea A el evento, los objetos azules quedan juntos, el número de maneras que puede ocurrir A es:

$${}_9P_{5,3,1} = 9!/(5!*3!*1!) = 504$$

Caso 3: Permutaciones cíclicas o circulares

Las permutaciones que ocurren cuando se ordenan objetos en una curva cerrada, dos permutaciones cíclicas no se consideran distintas si los objetos

correspondientes de dos arreglos están precedidos y van seguidos de los mismos objetos a medida que se avanza en el sentido que giran las manecillas del reloj, las permutaciones cíclicas tendrá que ser igual a las permutaciones lineales si se tuviera que atender además a los marcos de referencia externos y no solo a las posiciones relativas de los objetos entre si
El número de permutaciones cíclicas de n objetos es:
${}_{n}PC_{n} = (n-1)!$

Ejemplo
11. El número de formas como se pueden sentar siete personas alrededor de una mesa si:
a) pueden sentarse de cualquier forma 6!= 720
b) si dos personas determinadas no deben estar una al lado de otra 720 – 240 =480 dado que el suceso complemento es las dos personas deben estar una al lado de la otra, y esto puede hacerse de $(6-1)! * {}_{2}P_{2} = 240$

4. Combinaciones

Si consideramos n objetos diferentes y se está interesado en contar el número de maneas como se puede escoger r de esos n objetos, no considerando el orden de selección, únicamente las características de los elementos que forman parte el grupo, entonces se define una combinación de n objetos diferentes tomando de r en r como el número de subconjuntos de tamaño r no ordenado que tiene un conjunto de n elementos.

$${}_{n}C_{r} = n! / (r!\,(n-r)!)$$

Ejemplo

12. Un estudiante se somete a un examen de 10 preguntas, de las cuales debe responder 8, el número de alternativas para responder el examen está dado por: ${}_{10}C_{8} = 10!/ (8!*2!)$

Resuelva
13. Se van a seleccionar personas para un empleo entre un grupo de 5, imagine que los aspirantes difieren en el grado de preparación 1 es mejor que 2 etc. Encuentre la probabilidad del evento: escoger exactamente uno de los dos mejores y a continuación seleccionar uno de los 3 aspirantes menos preparados.
R: 3/5

5. Pruebas con remplazo y sin remplazo

Prueba: elección al azar de un número r de elementos.

A. Prueba con remplazo, procedimiento que implica que el elemento que se elige en una prueba se devuelve al conjunto inicial, en esta clase de pruebas se toma en cuenta el orden de la selección.

El número de formas como se pueden ordenar r elementos seleccionados con remplazo de un total de n es : n*n*.... Entonces es posible que los objetos que van a permutarse se repitan, en tal ocasión se usa la regla de la multiplicación y $nRr = n^r$

Ejemplo:

14. Una señora escribió cuatro cartas y las lleva al correo, donde encuentra que hay tres buzones y cualquiera de ellos sirve para depositar las cartas de cuantas maneras lo puede hacer 81= 34

B. Pruebas sin reemplazo, en esta pruebas el elemento que se elige se elimina del conjunto inicial, si interesa el orden en que se seleccionan los elementos se convierte en una aplicación de las permutaciones

Ejemplo:

15. Suponga que una caja contiene 5 tarjetas de color diferente, si se seleccionan 3 sin reemplazo y se está interesado en el orden de los colores que aparecen, el número de tríos que se pueden formar se calcula $_5P_3$= 5! / 2! = 5*4*3 = 60.

Si se seleccionaran 3 con reemplazo el número de tríos que se pueden formar se calcula 5*5*5= 125.

Ejemplos adicionales de los métodos de enumeración

16. En una empresa hay 12 funcionarios ejecutivos y uno es el presidente de la compañía, cuando limpian la sala de juntas disponen de un pequeño salón donde hay una mesa redonda y cupo para ocho de ellos, incluyendo al presidente, por ello, se decide elegir al azar un comité de 8 funcionarios que incluya al presidente y ocupar la mesa redonda, si solo importan las posiciones relativas en las que se sientan de cuantas maneras pueden hacerlo
$_{11}C_7$ * 7!= 1663200

17. Con 7 consonantes y 5 vocales cuántas palabras pueden formarse que consten de 4 consonantes y 3 vocales, no es necesario que las palabras tengan significados
$_7C_4$ * $_5C_3$* 7! = 35 *10*5040 = 1764000

18. Cuántas ensaladas de al menos un ingrediente pueden preparase con lechuga, escarola, endibia, berro y achicoria
${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5$ =5+10+10+5+1=31
Otra forma 2*2*2*2*2 -1= 32-1 (cada ingrediente pude ser incluido o no en la ensalada)

19. Un conductor puede tomar tres rutas para ir de la ciudad A la ciudad B y cuatro de la ciudad B a la ciudad C y tres de la ciudad C a la ciudad D Si para ir desde A a D el conductor debe pasar por B y C cuantas rutas posibles tiene disponibles el conductor
3*4*3= 36

20. Un aparato está compuesto de 5 partes que pueden ser ensambladas en cualquier orden. Si se desea realizar una prueba para determinar el tiempo necesario para cada una de las formas posibles de montaje, si cada forma se va a probar una vez cuantas pruebas deben realizarse
${}_5P_5$ = 120

BIBLIOGRAFÍA

Kaufmann y **F**aure. **Invitación a la Investigación de Operaciones**. México-España: Compañía Editora Continental, S.A. , 1967.

Mendenhall y **S**incich. **Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias**. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. 1997.

Montgomery y **R**unger. **Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería**. México: Mc. Graw Hill, 1996.

Levin y **R**ubin. **Estadística para Administradores**. México: Prentice Hall, 1997

Wackerly, **M**endenhall III, **S**cheaffer, **Estadística Matemática con aplicaciones**, Thomson, 2002

Walpole, **M**yers, **M**yers. **Probabilidad y Estadística para Ingenieros**. México: Prentice Hall, 1999.

Walpole, **M**yere, **M**yeres, **Y**e **Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias**, México Pearson, 2007